


## → Aperçu



# LES MATHÉMATIQUES EN IMAGES



**ZIAUDDIN SARDAR, JERRY RAVETZ & BORIN VAN LOON**

Copyright © 2016 EDP Sciences.

→ **Ap̣er̄çu**

# **LES MATHÉMATIQUES**

**ZIAUDDIN SARDAR, JERRY RAVETZ & BORIN VAN LOON**

**Dans la même collection :**

*La génétique*, 2015, ISBN : 978-2-7598-1767-2

*La logique*, 2015, ISBN : 978-2-7598-1748-1

*La relativité en images*, 2015, ISBN : 978-2-7598-1728-3

*Le temps en images*, 2014, ISBN : 978-2-7598-1228-8

*La théorie quantique en images*, 2014, ISBN : 978-2-7598-1229-5

*La physique des particules en images*, 2014, ISBN : 978-2-7598-1230-1

*La psychologie en images*, 2014, ISBN : 978-2-7598-1231-8

Édition originale: Mathematics, © Icon Books Ltd, London, 2011.

Traduction : Alan Rodney

Imprimé en France par Présence Graphique, 37260 Monts

Mise en page de l'édition française: [studiowakeup.com](http://studiowakeup.com)

**ISBN : 978-2-7598-1737-5**

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés, réservés pour tous pays. La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (alinéa 1<sup>er</sup> de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du code pénal.

**© EDP Sciences, 2015**



# POURQUOI S'INTÉRESSER AUX MATHÉMATIQUES ?

Rien qu'en entendant le mot « maths », tout le monde gémit. Les gens pensent que le monde est peuplé de deux sortes de personnes. Les « fûtés », qui comprennent les mathématiques mais ne sont pas exactement ceux dont on aimerait faire la connaissance à une fête...





Mais nous tous avons besoin de comprendre un peu les mathématiques.  
Sans elles, la vie ne serait pas concevable.





AINSI,  
CE SONT LES  
MATHÉMATIQUES  
QUI FONT TOURNER  
NOTRE CIVILISATION  
INDUSTRIELLE.

ELLES  
FORMENT LE  
LANGAGE DE BASE  
DES SCIENCES, DES  
TECHNOLOGIES ET  
DE L'INGÉNIERIE.

ELLES  
SONT ESSENTIELLES  
POUR LES ARCHITECTES,  
LES CONCEPTEURS, LES  
ÉCONOMISTES ET LES  
MÉDECINS.

ET MÊME L'ART  
DÉPEND UN PEU DES  
MATHÉMATIQUES.

Ce qui est sûr, c'est que les mathématiques nous guident dans le monde où nous vivons, celui que nous «formons» et modifions et dont nous faisons partie. Et puisque ce monde devient de plus en plus complexe, que les incertitudes de l'environnement deviennent de plus en plus urgentes et menaçantes, nous avons besoin des mathématiques pour mieux appréhender ces risques et pour mettre en place des solutions.

La capacité d'aborder les mathématiques ne requiert pas de talents spéciaux ou des compétences particulières – c'est exactement comme pour tout autre champ d'activités humaines, telle la danse. Un peu comme une performance de ballet, complexe et exquise à la fois, une démonstration de mathématiques peut être sophistiquée et belle à la fois.


Mais même si la plupart d'entre nous ne deviendrons jamais des artistes chevronnés du ballet, nous savons tous ce qu'est la danse, et d'ailleurs pratiquement tout le monde sait danser, du moins un peu.

De même, nous devrions tous savoir un peu à quoi ressemblent les mathématiques et être capables d'aborder et d'exécuter certaines opérations de base.





# COMPTER



DANS UNE  
CERTAINE MESURE,  
NOS MATHÉMATICIENS EN  
HERBE MARCHENT DANS LES  
TRACES DE L'HUMANITÉ POUR  
LE DÉVELOPPEMENT DE  
NOS CONNAISSANCES  
MATHÉMATIQUES.

À l'école, nos enfants apprennent à compter, à calculer et à mesurer. Et, une fois apprises, ces techniques leur semblent « élémentaires ». Mais pour des novices, elles sont pleines de mystères.

Réciter des nombres devient une incantation, surtout quand on s'approche des grands nombres.

Compter jusqu'à cent est fatigant, mais jusqu'à mille, c'est une montagne entière qu'il faut escalader ! Alors, quel est le dernier nombre, le plus grand d'entre tous ?

ET S'IL  
N'EXISTE PAS, QUEL  
EST LE NOMBRE  
AU BOUT ?



Comment est-ce que nous nommons les nombres, c'est-à-dire quelle est notre façon de les énoncer l'un après l'autre ? Peut-être que seulement quelques nombres suffisent. Il y a des animaux qui parviennent à reconnaître des groupes de nombres, jusqu'à cinq ou sept – et au-delà, ils les considèrent comme « beaucoup ». Mais si nous savons que les nombres s'enchaînent sans fin, nous ne pouvons pas inventer de nouveaux noms indéfiniment.

Le langage des Indiens Dakota n'était pas écrit.



Leur langage était sous forme de toile tissée avec des pictogrammes en encre noire. Chaque année, un nouveau pictogramme était ajouté pour consigner le principal événement de l'année écoulée.

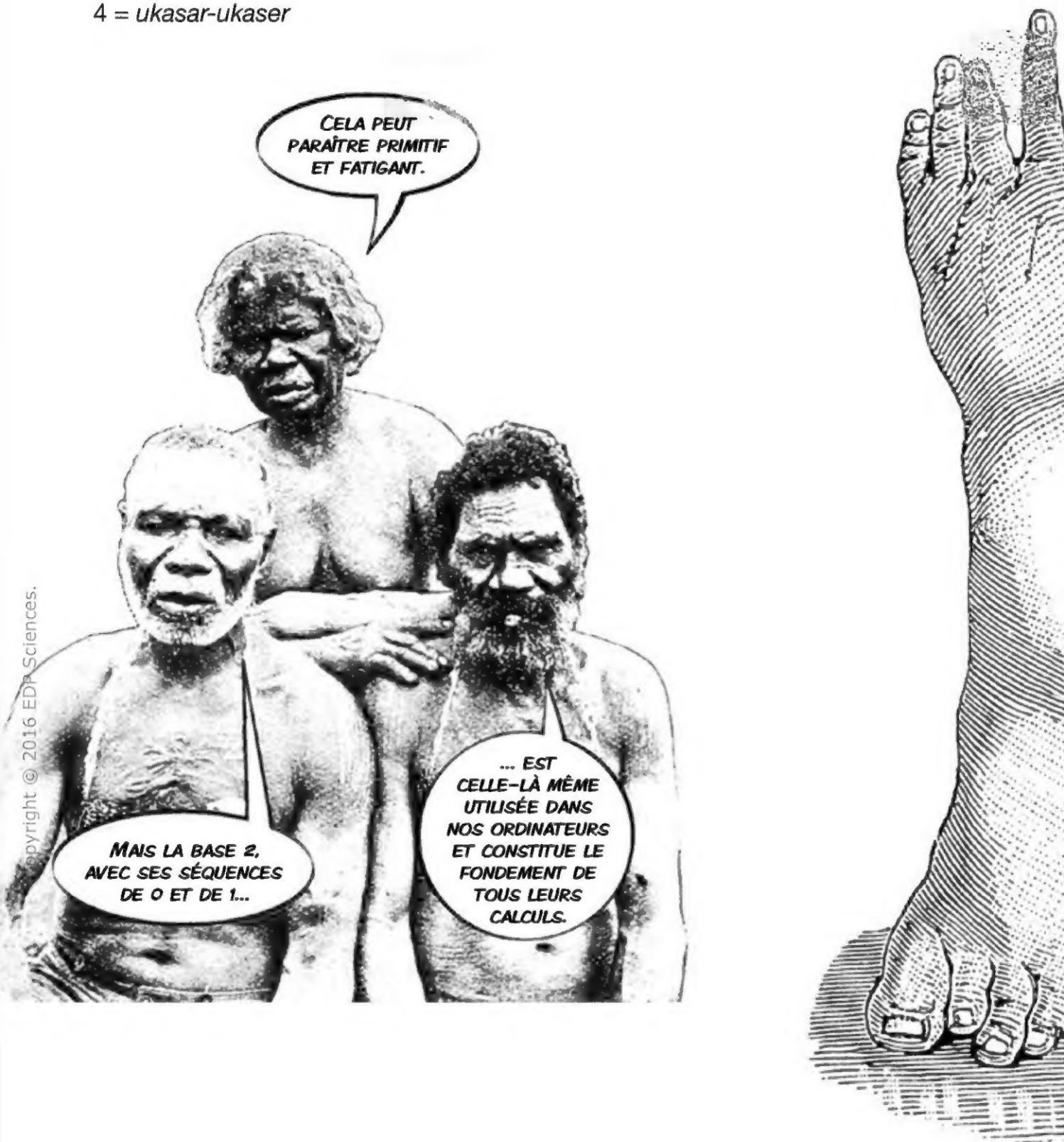
La meilleure façon de nommer systématiquement les choses et les nombres, c'est d'avoir une **base**, c'est-à-dire un nombre qui sert à fixer le début d'un comptage. La base la plus simple est la base 2. Par exemple, les Gumulgals, peuplade indigène qui vivait en Australie, comptaient ainsi :

1 = *urapon*

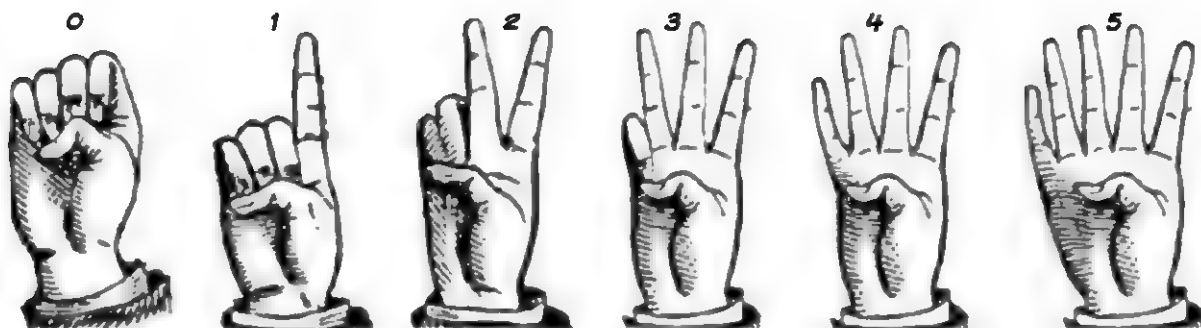
2 = *ukasar*

3 = *urapon-ukasar*

4 = *ukasar-ukaser*







Les doigts aussi peuvent servir de base. Certains systèmes font appel à cinq doigts mais, plus couramment, on compte avec les dix doigts. Cependant, il existe bien d'autres bases, tel l'ancien système monétaire britannique où douze pennies valaient un shilling, puis vingt shillings une livre sterling, voire vingt-et-un shillings une guinée! Les caissières dans les magasins devaient avoir un livre de calculs et d'équivalence sous la main pour donner les prix.

Et quand, par exemple, les gens achetaient à crédit, ils pouvaient s'entendre dire que leur nouveau canapé au prix de 155 guinées pouvait être réglé en 104 échéances, chacune de une livre, quinze shillings et sept pennies et demi!

QUI  
POUVAIT  
CALCULER LE TAUX  
D'INTÉRÊT AVEC  
UN SYSTÈME  
PAREIL?

PAS ÉTONNANT  
QUE L'ON AIT  
DONNÉ À CE SYSTÈME  
LE SOBRIQUET DE  
«NEVER-NEVER»  
(JAMAIS-JAMAIS)  
...

... SIGNIFIANT  
QUE L'ON N'AVAIT  
JAMAIS FINI DE  
REMBOURSER  
SON CRÉDIT.

La base 20 (les doigts des mains et des pieds ?) est également assez courante. Les Yorubas d'Afrique l'utilisaient et passaient par la soustraction pour des nombres plus grands, mais toujours avec la même base. Ils avaient des noms différents pour les nombres de un (okan) à dix (eewa). À partir de onze et jusqu'à quatorze, ils additionnaient. Ainsi onze correspondait à «un de plus que dix» et quatorze à «quatre de plus que dix». À partir de quinze, ils passaient à la soustraction. Ainsi, quinze était «vingt moins cinq» et dix-neuf était «vingt moins un», et jusque quatre-vingt-dix-neuf qui était «quatre-vingts plus vingt moins un».



CEUX QUI  
PASSENT PAR UN  
ORDINATEUR SE SERVENT  
EN RÉALITÉ DE LA  
BASE 2.

Il n'existe pas de « meilleure base ». Nous pouvons juste penser à un système de numérotation ayant certains attributs : facile à mémoriser, simple pour nommer les éléments, utile pour faire des calculs, etc.

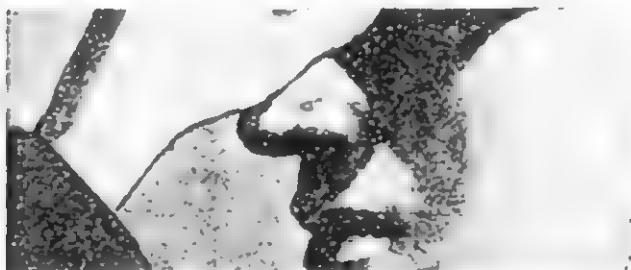




## L'ÉCRITURE DES NOMBRES



Il était possible, bien sûr, de calculer au sein d'une culture sans écriture. Mais de tels calculs demandaient une grande mémoire et des talents particuliers. Au fur et à mesure que l'art de l'écriture s'est répandu, différents systèmes, parfois assez complexes, ont fait leur apparition.



Les Aztèques du Mexique possédaient un système de numérotage utilisant la base 20 comprenant quatre symboles.

Le 1 était un gros point, représentant un grain de maïs. ●

Le 20 était représenté par un drapeau. P

Le 400 était représenté par un plant de maïs. 🌽

Le 8 000 était symbolisé par une poupée de maïs. 🧸

Avec ces quatre symboles, les Aztèques parvenaient à représenter toutes sortes de nombres. Par exemple, le nombre 9 287 était représenté par :

$$8\ 000 + (3 \times 400) + (4 \times 20) + 7$$





0

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

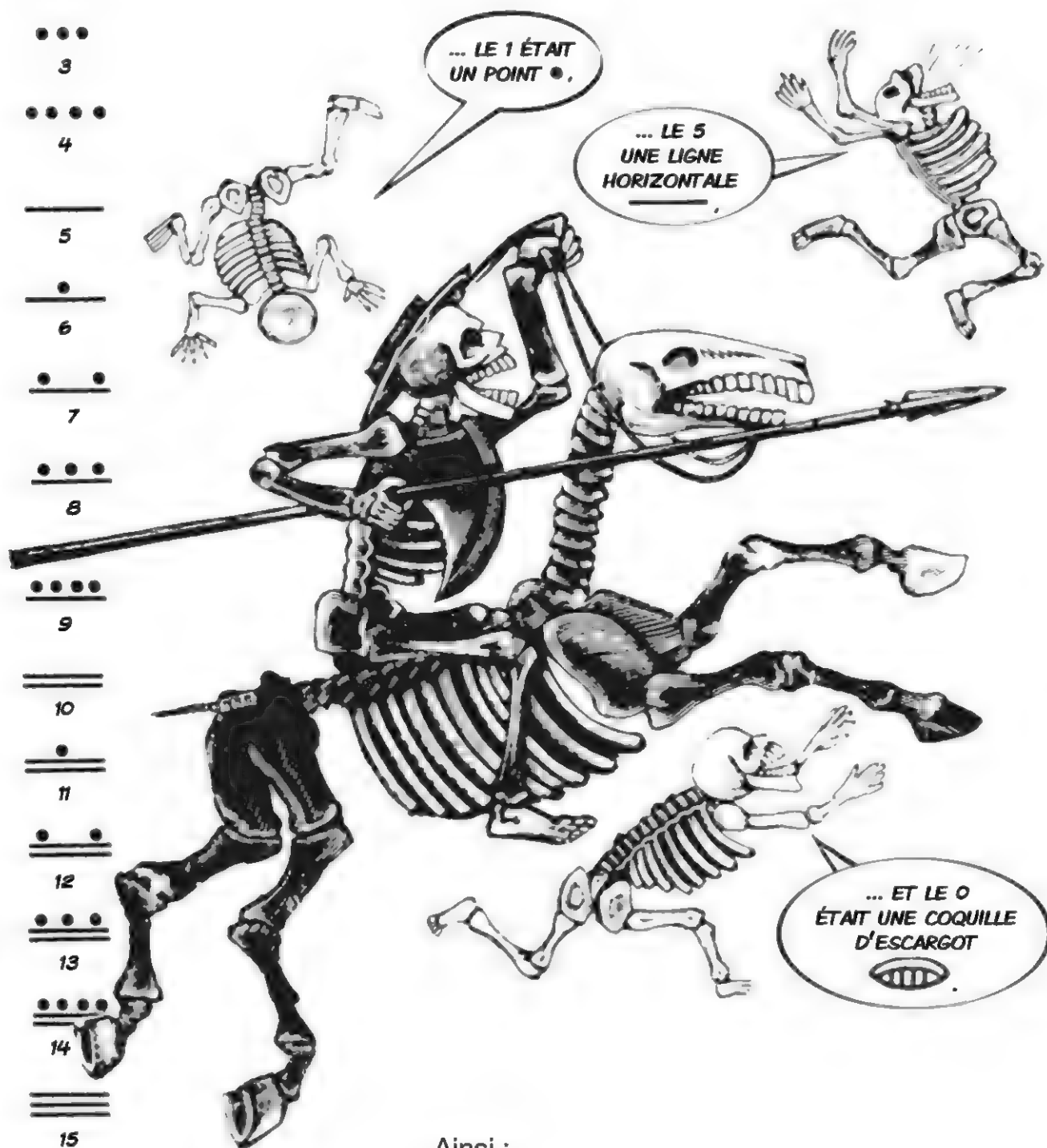
15

16

17

18

Les Mayas, civilisation précolombienne d'Amérique centrale, n'utilisaient que trois symboles pour leur système de numérotation :



Ainsi :

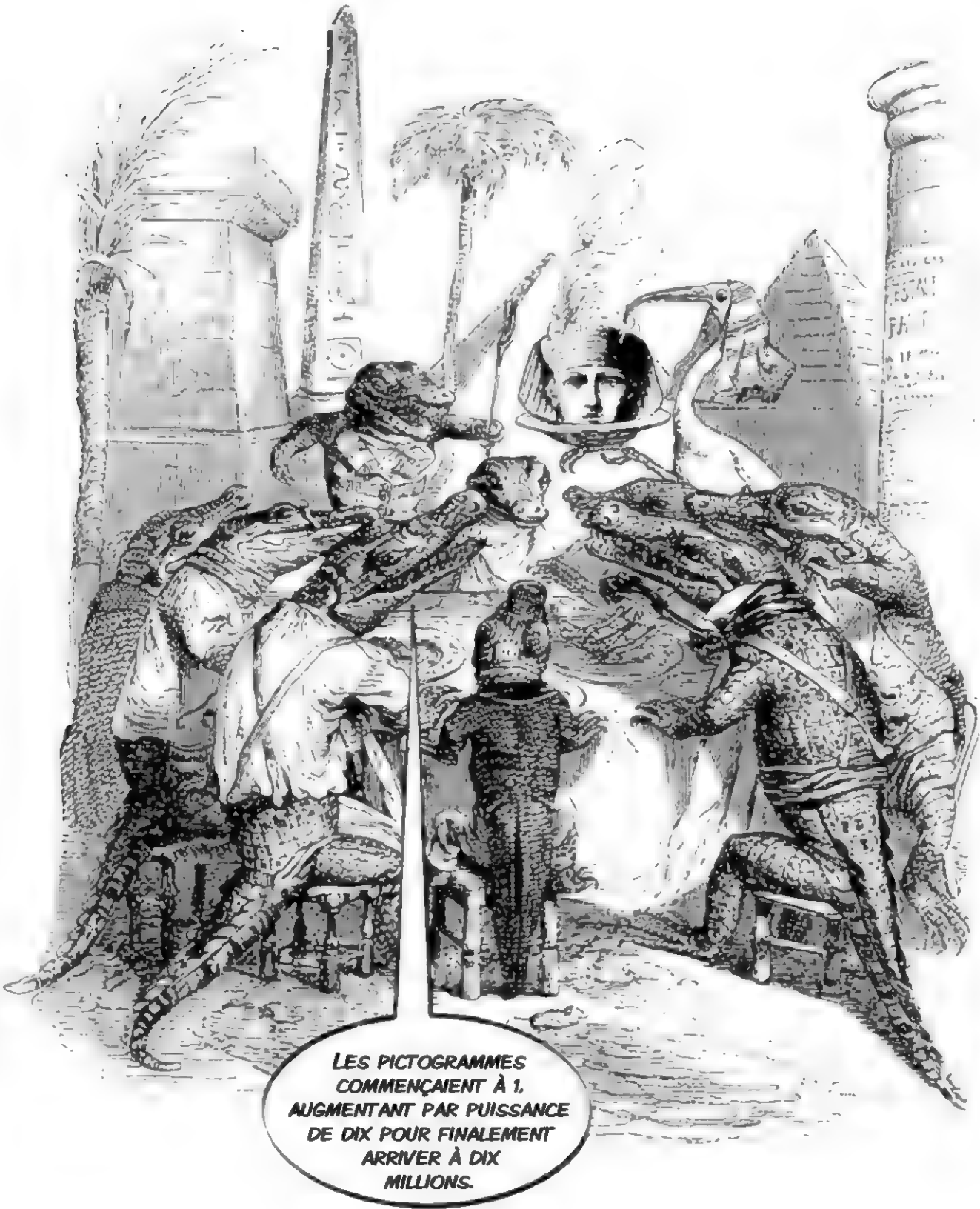
• • • représente 3

— — — — — représente 13

et vingt devenait

Les Égyptiens de l'Antiquité (c. 4000–3000 avant J.-C.) utilisaient un sous-ensemble de leurs hiéroglyphes pour écrire leurs nombres.

Copyright © 2016 EDP Sciences.



1	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000
	∩	∩	⌋	∩	∩	∩	☼



Les Babyloniens (c. 2000 avant J.-C.) se servaient d'un système en base 60 et de multiples de 60, avec les symboles suivants :

1  10  60  600  3600 

Plus tard, ils ont fait évoluer le système précédent, ne conservant que deux valeurs :

 pour le 1 (ou le 60 selon la position sur la ligne) et  pour le 10.

Ainsi, pour représenter 95, le scribe écrivait :

95 = 60 (1) + 35:       



Le système babylonien en base 60 (sexagésimal) est resté. Nos cercles ont 360°. Les heures ont 60 minutes et les minutes 60 secondes.

L'ancienne Chine (c. 1400–1100 avant J.-C.) utilisait une base 10 au début et des symboles de 1 à 10, pour 100, 1 000 et 10 000. Plus tard, vers

300 avant J.-C., les Chinois ont développé un système de bâtons (traits courts) pour écrire leurs nombres.



AH! IL S'AGIT D'UN STÉRÉOTYPE TYPIQUEMENT ORIENTAL.

Les traits pouvaient être placés à la verticale, pour désigner la séquence de un à neuf :

ou à l'horizontale :

Normalement, les traits verticaux servaient à transcrire les unités et les centaines, et les traits horizontaux les dizaines et les milliers. Ainsi 6 708 s'écrivait :

où l'espace est le zéro.

Les Chinois avaient réalisé, il est vrai, cette très belle invention qui place les symboles écrits dans un monde différent des noms des nombres. Il s'agissait d'un système de « valeur de position ». Le sens d'un nombre, en tant qu'expression de la quantité, dépendait de sa position dans un chapelet de nombres. Pour illustrer, un 2 pouvait prendre la valeur deux, vingt ou deux cents suivant sa place dans la séquence. Cela rendait inutile de nommer les bases plus élevées – nous savons bien que dans 234 le 2 correspond à 200.




Les Indiens (d'Inde) ont développé trois systèmes distincts de numérotation.

D'abord, les Kharosthi (c. 400–200 avant J.-C.) se servaient de symboles pour dix et vingt, les autres nombres jusqu'à cent se construisant par addition.

Puis, les Brahmi (c. 300 avant J.-C.) se sont servis de symboles distincts pour les chiffres un, quatre, neuf et dix, cent, mille et ainsi de suite.

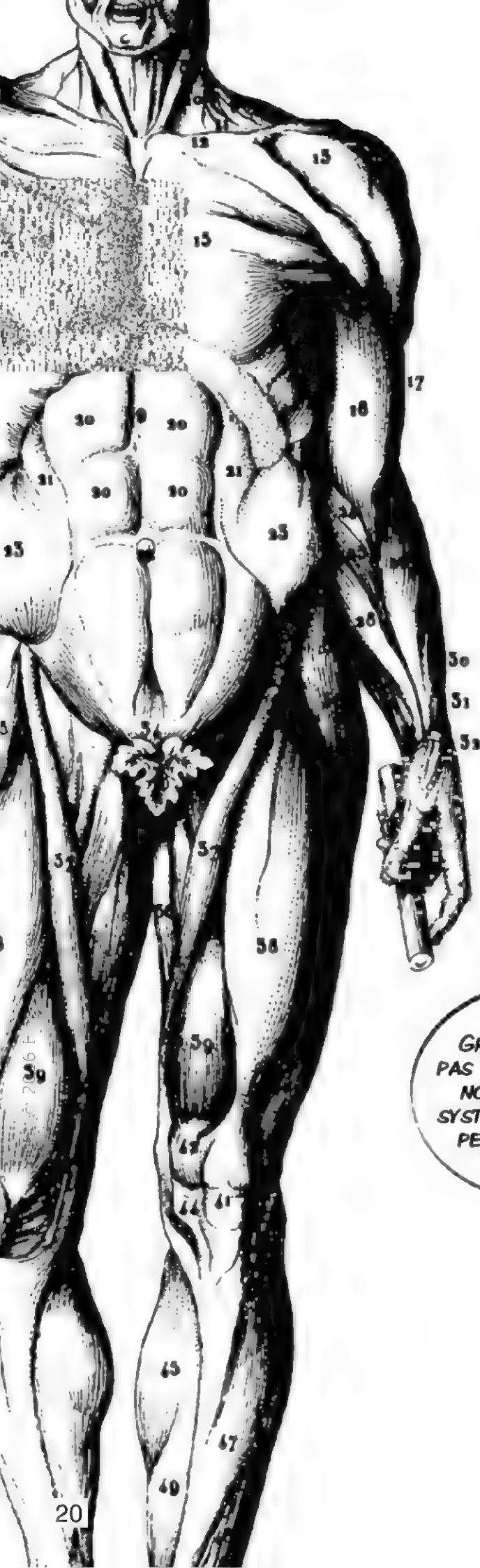
Enfin, les Gwalior (c. 850) avaient adopté des symboles pour les nombres de un à neuf, mais aussi un symbole pour le zéro.



PENSEZ À  
UN NOMBRE... TRÈS  
BIEN, MAINTENANT  
ON LE DOUBLE... ON  
LE TRIPLE... ON LE  
'QUADRUPLE'...

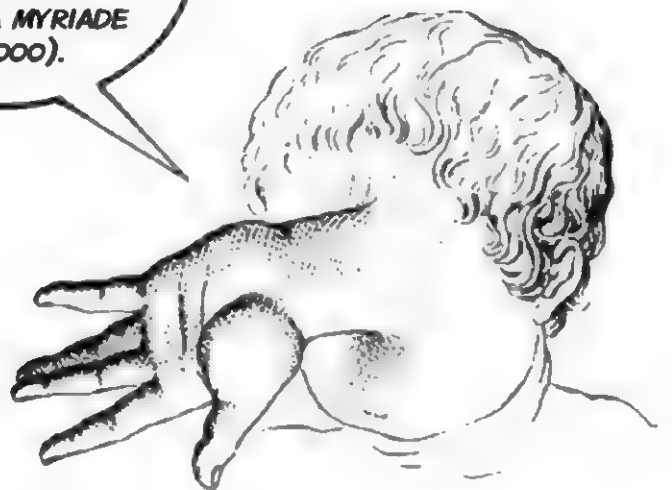
Les Indiens étaient très à l'aise avec les grands nombres. Les textes hindous fournissent des noms, tel parardha pour 1 000 000 000 000 (en sanskrit-hindi नमो वद्विद्भ्यः परार्धम्, le plus grand nombre mentionné dans le Narada Purana).





Les Grecs de l'Antiquité (c. 900 avant J.-C.–200 après J.-C.) avaient imaginé deux systèmes. Le premier utilisait les premières lettres des noms des nombres. Ainsi cinq était désigné par un *pi*, dix par un *delta*, cent par l'antique version de *H*, et ainsi de suite. Le second système, qui a vu le jour à partir du III<sup>e</sup> siècle avant J.-C., utilisait toutes les lettres de l'alphabet grec, et même trois empruntées à l'alphabet phénicien, ce qui faisait un total de vingt-sept symboles numériques. Les neuf premières lettres de l'alphabet correspondaient aux nombres de 1 à 9, les neuf lettres suivantes représentaient les dizaines de 10 à 90 et les neuf dernières lettres désignaient les centaines de 100 à 900.

NOUS, LES  
GRECS, N'AIMIONS  
PAS TROP LES GRANDS  
NOMBRES; NOTRE  
SYSTÈME DÉPASSAIT À  
PEINE LA MYRIADE  
(10 000).



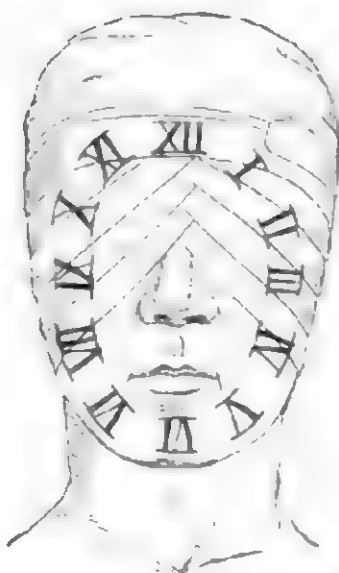
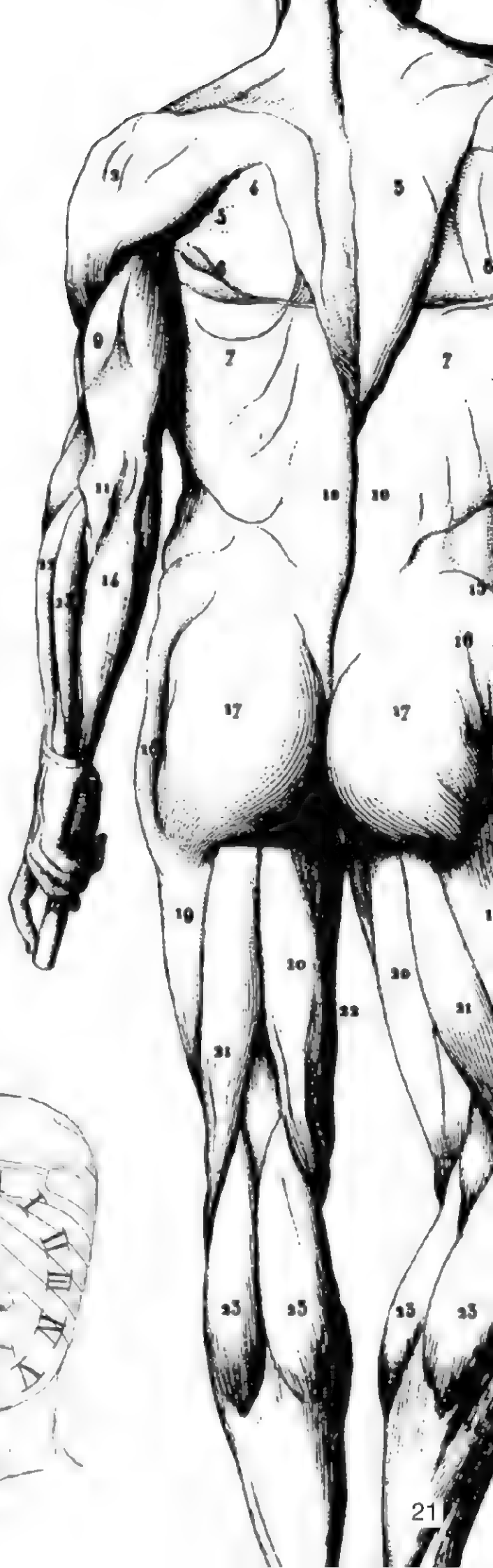
Le système de notation utilisé chez les Romains (400 avant J.-C.– 600 après J.-C.) comprenait sept symboles : I pour 1, V pour 5, X pour 10, L pour 50, C pour 100, D pour 500 et M pour 1 000.

Les nombres s'inscrivaient de gauche à droite, en commençant en principe par les symboles les plus grands, et c'est par l'addition des valeurs que l'on atteignait le nombre voulu.

Ainsi LX correspond à 60.

Dans la pratique et pour plus de facilité, un symbole de plus petite valeur pouvait être inséré à gauche d'un symbole plus grand. Ainsi MCM représente l'année 1900.

Ce système de numérotation, encore utilisé de nos jours pour les horloges ou les ornements, n'était pas des plus commodes pour effectuer des calculs.



Le fait d'affecter un nombre à chaque lettre de l'alphabet a permis l'essor d'un d'art divinatoire très sophistiqué, la gématrie (partie de la Kabbale juive fondée sur l'interprétation arithmétique des mots de la Bible) ou, plus couramment, la numérologie. À partir d'un mot, surtout d'un nom propre, on pouvait redispser les lettres pour former un nombre puis les analyser en termes de qualité et de sens caché. Quiconque dont le nom donnait 666 (le nombre biblique pour la Bête) était évidemment maudit !



La civilisation musulmane (650 avant J.-C. à nos jours) a développé deux ensembles de nombres, assez semblables en définitive, mais l'un était utilisé dans la partie orientale du monde musulman (Arabie et Perse), tandis que l'autre est devenu courant dans la partie occidentale (Maghreb et Espagne musulmane). Les deux systèmes contiennent dix symboles allant de zéro à neuf.

Ensemble oriental : • ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩

Ensemble occidental : 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

L'ensemble oriental est encore utilisé dans tout le monde arabophone.  
L'ensemble occidental est devenu ce que nous, Occidentaux, appelons « les chiffres arabes », c'est-à-dire notre système actuel de numérotation.



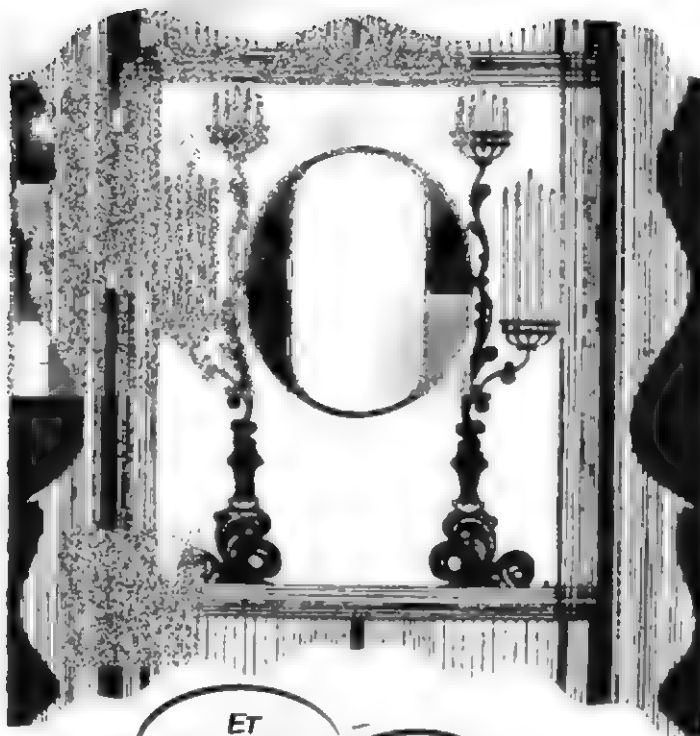


# Le Zéro

Le zéro est en réalité une invention relativement récente (vers le <sup>vi</sup><sup>e</sup> siècle de notre ère) et semble être le fruit des civilisations chinoise et hindoue. Les Chinois en avaient besoin pour compléter leur système, qui associait la place du symbole et sa valeur. Comment pouvaient-ils représenter «deux cent cinq»? Comme 25 serait manifestement faux, il fallait un symbole pour combler le «vide», par exemple avec un tiret, comme 2-5. Mais le sens véritable du zéro a été développé dans la civilisation indienne, avec ses spéculations sur le vide très poussées.



Cette trame culturelle  
 était nécessaire pour  
 les inventions, car  
 le concept du zéro  
 est très spécial. Il se  
 comporte comme  
 d'autres nombres, car  
 nous pouvons l'inclure  
 dans des additions.



MAIS SI  
 L'ON MULTIPLIE  
 UN NOMBRE  
 QUELCONQUE PAR  
 ZÉRO, LE RÉSULTAT  
 DONNE ZÉRO. ON PEUT  
 MÊME CONSTRUIRE  
 DES ÉQUATIONS  
 PARADOXALES, TELLE  
 $2 \times 0 = 4 \times 0$ , PUIS  
 ON RETIRE LES DEUX  
 ZÉROS, LAISSANT  
 DONC  
 $2 = 4$ !

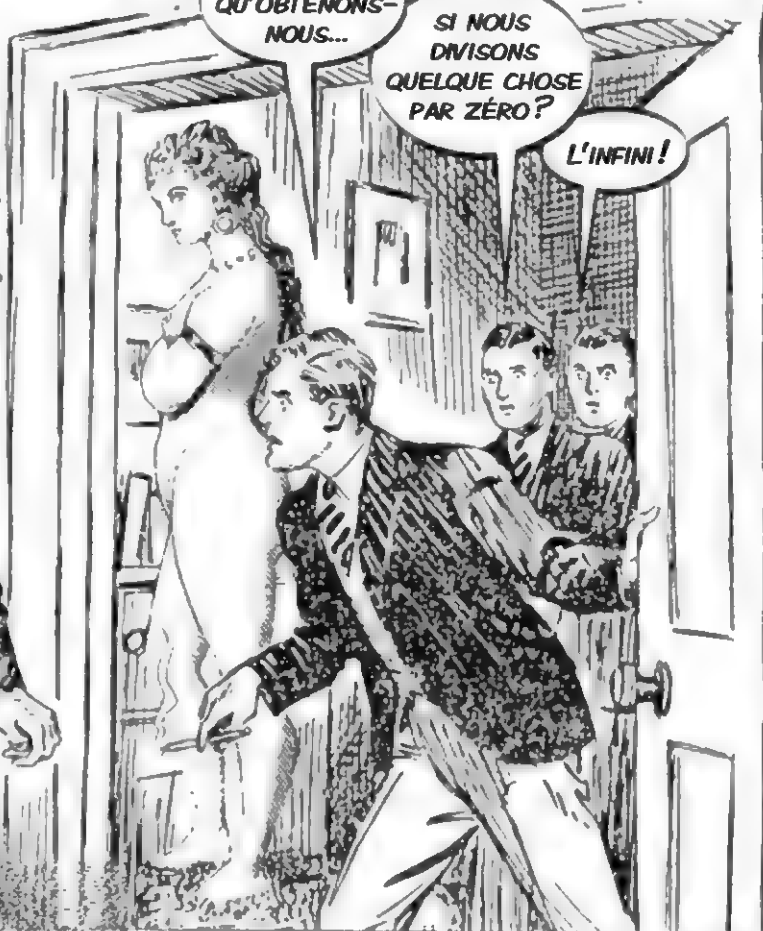
LE BEC →



ET  
 QU'OBTENONS-  
 NOUS...

SI NOUS  
 DIVISONS  
 QUELQUE CHOSE  
 PAR ZÉRO?

L'INFINI!



Le zéro est nécessaire pour certains calculs, mais il est « exclu » dès lors qu'il s'agit de compter. Le premier objet dans une rangée n'est pas le « zéro-ième ». Nous retrouvons ce paradoxe dans le calendrier : les années 1900 font partie du xx<sup>e</sup> siècle car il n'existait pas de « zéro-ième » siècle au début du calendrier occidental, dit de « notre ère ».

Le zéro peut revêtir deux sens, comme on voit dans cette « blagounette ».  
Le guide d'un musée s'adresse aux visiteurs scolaires :



Tout le monde a compris  
que l'affirmation était ridicule,  
mais il n'empêche que l'un  
des enfants a fait l'addition...

comme il avait appris à la faire à l'école. Personne ne lui avait dit que les six zéros venant après le 65 étaient des chiffres de remplissage et non de comptage. Après tout,  $0 \times 4 = 0$  mais  $0 + 4 = 4$ . C'était peut-être de tels paradoxes (mais les enfants aujourd'hui en sont soigneusement protégés) qui ont rendu les premiers mathématiciens soupçonneux face à d'étranges nombres comme le zéro.

# QUELQUES NOMBRES SPÉCIAUX

EN DEHORS  
DU ZÉRO, IL EXISTE  
D'AUTRES CATÉGORIES  
DE NOMBRES SPÉCIAUX  
AVEC LESQUELS NOUS  
DEVONS NOUS  
FAMILIARISER.

Certains sont  
des « nombres  
avec de la personnalité », pouvant  
de ce fait être considérés comme  
possédant des propriétés  
magiques. Les nombres 2, 3, 5, 7 et 13 sont chacun, à leur  
manière, « spéciaux ». Il y a aussi les nombres définis par  
des propriétés arithmétiques qui ont attiré l'attention.

Un **nombre premier** est un entier naturel  
qui admet seulement deux diviseurs entiers  
et positifs (qui sont le 1 et lui-même).

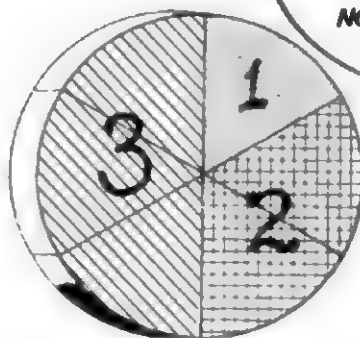
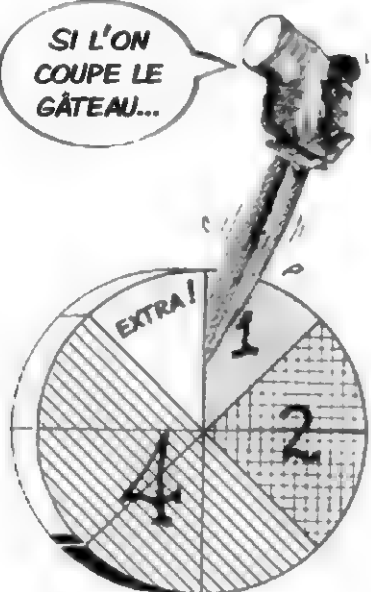
DES EXEMPLES DE  
NOMBRES PREMIERS:  
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19...

Les **nombres « parfaits »** sont égaux à la somme de leurs  
diviseurs, appelés les parties aliquotes (à noter qu'il n'en  
existe que 3 jusque 1 000 – le 6, le 28 et le 496.

Ensuite vient 8128, puis 33 550 336, 8 589  
869 056, 137 438 691...). Le 6 est parfait  
parce que ses diviseurs – 1, 2 et 3 –  
s'additionnent pour donner 6.

UN AUTRE  
NOMBRE PARFAIT  
EST  $28 = 1 + 2 + 4 +$   
 $7 + 14$ ; LE SUIVANT EST  
496 MAIS VOUS POUVEZ  
TROUVER LES PARTIES  
ALIQUOTES VOUS-  
MÊME.

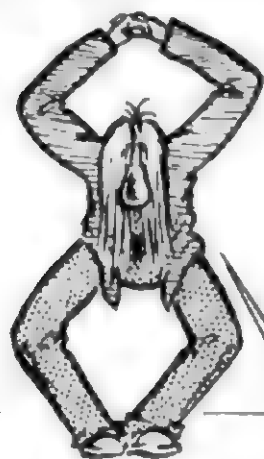
SI L'ON  
COUPE LE  
GÂTEAU...



DANS LE  
PASSÉ, DE TELS  
NOMBRES ÉTAIENT  
CONSIDÉRÉS COMME TRÈS  
SPÉCIAUX, D'OÙ LEUR  
NOM DE NOMBRES  
PARFAITS.

On voit que 8 n'est pas parfait... ... mais que 6 l'est!





DONC,  
DEUX «FAUX»  
FONT UN  
«VRAI»?

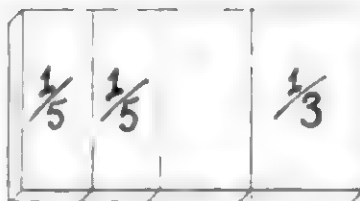
Les **nombre**s **néga**tifs, de valeur inférieure à zéro (comme la température le jour où il fait très froid), portent le symbole « moins » :  $-$ . Ils sont aussi indispensables mais présentent, tout de même, des paradoxes, tels que dans  $(-1) \times (-1) = +1$ .

Les « **frac**tions » ou « **nombre**s **ration**nels » sont des quantités que l'on peut exprimer comme le rapport entre deux entiers, par exemple  $2/3$ . Ils sont nécessaires pour faire des calculs, mais pas pour compter, dans la mesure où il n'y a pas d'unités fractionnaires, ni « suivants », comme quand on dit que 5 suit 4... Pour ces raisons, ils ont mis longtemps à être acceptés comme des « nombres ». De plus, ils ont un système d'arithmétique à part, lequel n'est pas facile à comprendre.

ESSAIE  
D'ADDITIONNER  
 $2/5$  À  $1/3$ ; C'EST  
COMME « COUPER »  
LE FLAPJACK\*

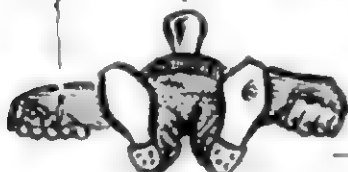


\*biscuit britannique  
très dur, « incassable »



=  $11/5$

FAIRE DES  
PORTRAITS  
PAR DES  
NUMÉROS,  
MON CUL!

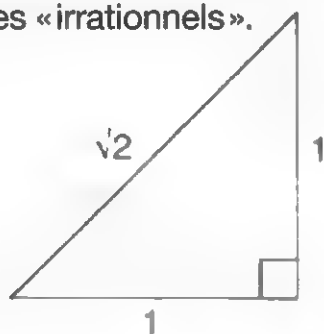


Toutes ces familles de nombre

s étaient connues dans d'autres grandes civilisations, telles que la civilisation chinoise ou indienne. Avec le développement des mathématiques théoriques, d'abord chez les Grecs, de nouvelles propriétés sont apparues, menant à l'invention de nouvelles sortes de nombres.

Les **nombre*s* irrationnels** ne peuvent être exprimés comme des rapports entre deux entiers. Un exemple important est la racine carrée de 2 (symbole  $\sqrt{2}$ ) révélée par des opérations géométriques. Elle représente la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant des côtés de même longueur, un.

On appelle ces nombres des «irrationnels».



CERTAINES  
QUANTITÉS SONT TRÈS  
«IRRATIONNELLES», CAR  
ON NE PEUT LES EXPRIMER,  
MÊME AU MOYEN DE  
NOMBRES GÉNÉRÉS  
PAR DES OPÉRATIONS  
ALGÈBRIQUES.

LE  
PLUS CÉLÈBRE  
DE CES NOMBRES EST  
«PI» OU  $\pi$ , C'EST-À-DIRE  
LE RAPPORT DE LA  
CIRCONFÉRENCE  
D'UN CERCLE  
SUR SON  
DIAMÈTRE.

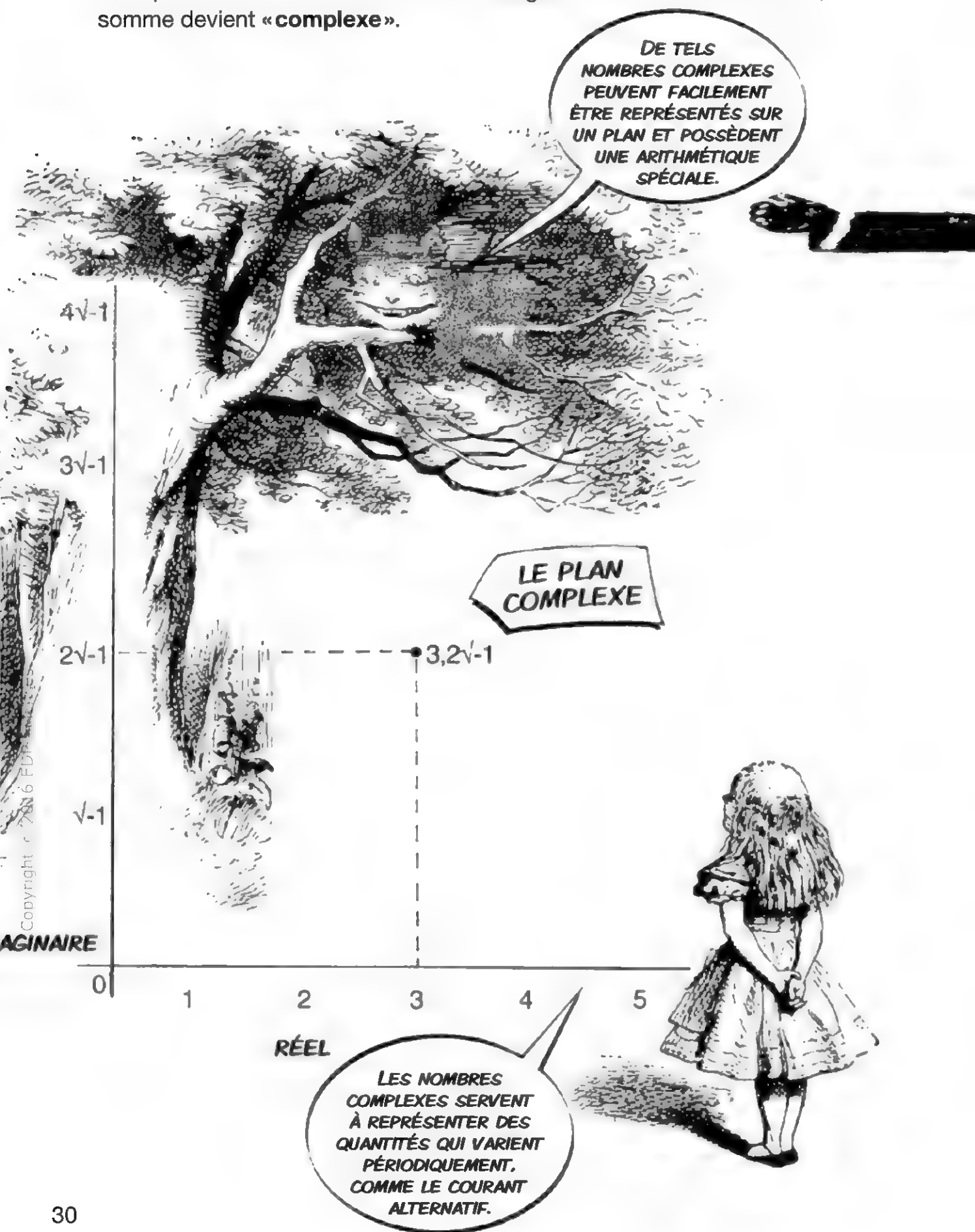
Réduire ce rapport à des irrationnels avait pour nom «la quadrature du cercle». Des mathématiciens avaient essayé de résoudre cette quadrature pendant des siècles, jusqu'à ce qu'il fut démontré que c'était rigoureusement impossible. De tels nombres prenaient alors le nom de...

«PI» ...  
«PIE», T'AS  
COMPRIS?

...  
«TRANSCENDANTAL»

Les **nombre*s* imaginaires** sont le résultat d'une multiplication d'un nombre réel par une quantité «**imaginaire**», c'est-à-dire par la racine carrée de moins 1 ( $\sqrt{-1}$ ).

Dès que l'on additionne des nombres imaginaires à des nombres réels, la somme devient «**complexe**».



# LES GRANDS NOMBRES

La plupart d'entre nous sommes impressionnés par les grands nombres et nous trouvons difficile d'en apprécier leur ordre de grandeur réel.



IL Y A UN MILLIARD D'ANNÉES. L'HOMME ÉTAIT SUR LE POINT D'ARRIVER SUR TERRE.

EN 1903, IL S'ÉTAIT ÉCOULÉ UN MILLIARD DE MINUTES DEPUIS LA NAISSANCE DU CHRIST. IL Y A UN MILLIARD DE SECONDES. CEUX QUI ONT 31 ANS AUJOURD'HUI N'ÉTAIENT PAS ENCORE NÉS.



Cent milliards paraît être un nombre encore plus ardu. Mais de nos jours, il n'est pas inhabituel qu'un pays – notamment parmi ceux en voie de développement – ait accumulé une dette nationale de cet ordre. Si un pays endetté devait rembourser un dollar par seconde, 24 heures sur 24, 7 jours sur 7 et 52 semaines par an, il mettrait 3 180 ans à régler le tout...





On peut voir aisément comment on arrive à des nombres aussi grands par le biais d'un vieux démon, la « lettre en chaîne ». Une personne envoie une lettre à deux amis, leur demandant de la recopier et de la faire suivre à deux amis, et ainsi de suite. La première personne envoie donc 2 lettres ; à l'étape suivante  $2 \times 2$  soit 4 lettres sont envoyées ; à la troisième étape  $2 \times 2 \times 2$  soit 8 lettres sont envoyées. La question est : en combien d'étapes parvient-on à un milliard de lettres envoyées ?



# LES PUISSANCES



TONNERRE  
DE DIEU :  
LES PUISSANCES  
M'ENVAHISSENT !

C'est assez pénible d'écrire un milliard en chiffres :  
1 000 000 000.

Heureusement, il existe une forme de notation pratique pour les grands nombres. Nous voyons bien que un milliard équivaut à

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10.$$

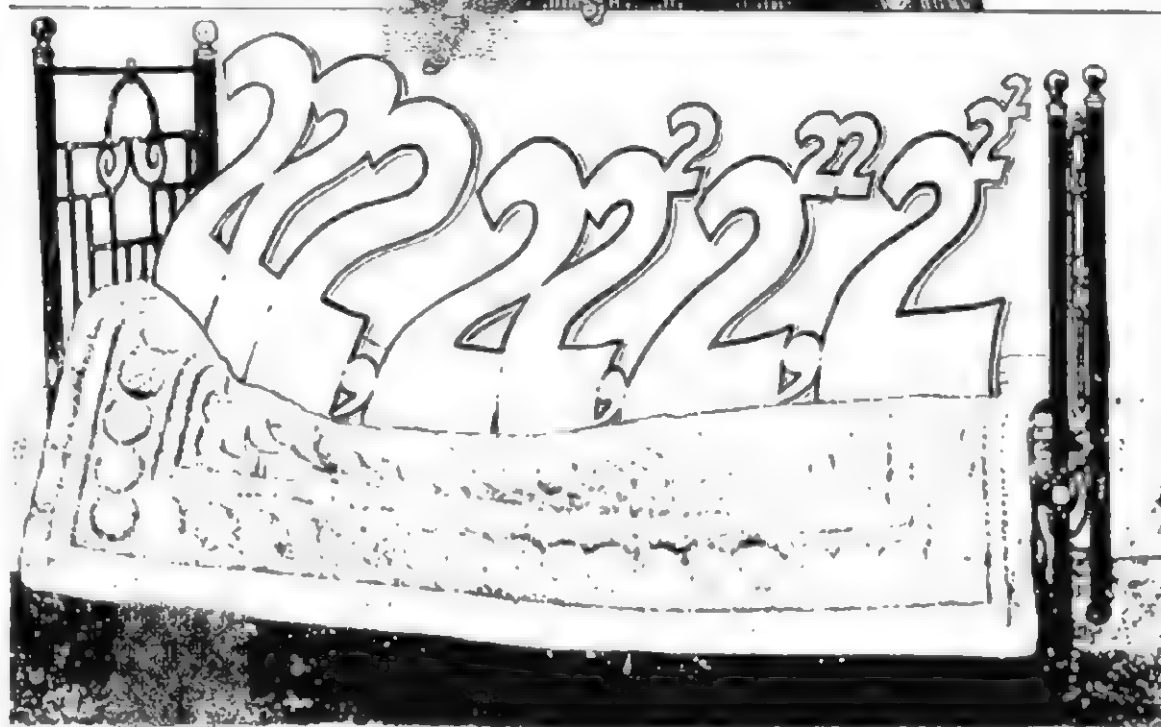
Si nous convenons que le produit  $10 \times 10$  peut être noté  $10^2$  et  $10 \times 10 \times 10$  par  $10^3$ , un million s'écrira  $10^6$  et un milliard  $10^9$ . De même, cinq milliards devient  $5 \times 10^9$ .

Élever un nombre quelconque à la puissance  $n$  signifie que le nombre est multiplié par lui-même  $n$  fois. Ainsi  $2^5$  signifie  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$  soit 32.

Nous pouvons nous familiariser plus avec cette forme de notation en examinant la question suivante.

QUEL EST LE NOMBRE LE PLUS GRAND QUE L'ON PUISSE ÉCRIRE AVEC SEULEMENT TROIS «2»?

VOICI LES NOTATIONS POSSIBLES :



Le plus petit résultat est  $2^{2^2} = 2^4 = 16$ . Le suivant est 222, puis  $2^{2^2} = 484$  et enfin le plus grand sera  $2^{2^{2^2}}$ , soit 4 194 304.

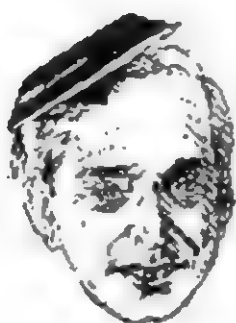
Cette notation des puissances marche aussi pour les fractions. Pour transformer une puissance en fraction, nous posons simplement un signe négatif devant la puissance. Ainsi,  $10^{-1}$  signifie 1/10;  $10^{-2}$  est 1/100;  $10^{-3}$  est 1/1 000 et ainsi de suite.



De même, si nous agrandissons une photo ou une carte  $x$  fois, il faudra du papier ayant une surface  $x^2$  fois plus grande.



On appelle  $x$ ,  $x^2$ ,  $x^3$ ,  $x^4$  et  $x^5$ , respectivement, les puissances un, deux, trois, quatre et cinq. Les premiers nommés pouvaient également être désignées par puissance au carré, ou au cube, en raison de leurs implications géométriques. Il va de soi que n'importe quel nombre peut remplacer les 2, 3, 4 ou 5, de sorte que si nous posons  $n$  pour « n'importe quel nombre », nous dirons que  $x^n$  représente  $x$  élevé à la puissance  $n$ .



PENDANT UNE LONGUE PÉRIODE, LES MATHÉMATICIENS S'INTERROGEAIENT SUR LE SENS DE CES PUISSANCES ÉLEVÉES; ILS N'ARRIVAIENT SIMPLEMENT PAS À IMAGINER UN HYPER-ESPACE DANS LEQUEL LA FORME CORRESPONDANTE POURRAIT ÊTRE DÉCRITE.

Dans son livre *The Dazzling* (*al-Bahir fi'l-jabre* ou *Le brillant en algèbre*), **Ibn Yahya al-Maghribi al-Samawal** (c. 1130–1180), mathématicien né juif à Bagdad et converti par la suite à l'islam, a été le premier à proposer une définition de...





# LES LOGARITHMES

On appelle logarithme la puissance à laquelle doit être élevé un nombre donné pour obtenir un autre nombre. On appelle « base » le premier nombre. Puisque  $10^2 = 100$ ,  $\log_{10} 100 = 2$ . On énonce alors « le logarithme de 100 base 10 est 2 ».

Les bases les plus utilisées sont la base 10 et la base exponentielle  $e$  (voir p. 99).

Comme nous venons de voir que  $x^0 = 1$  quel que soit  $x$ , alors  $\log 1 = 0$  quelle que soit la base.

Pour pouvoir multiplier ou diviser deux expressions logarithmiques, nous profitons du fait que la multiplication et la division d'un nombre correspondent respectivement à l'addition et à la soustraction de leurs puissances.

Ainsi  $\log (X \times Y) = \log X + \log Y$ .



**LOGA**

JE VAIS DEVOIR  
ME SERVIR DE LA RÈGLE  
LOGARITHMIQUE ET DE  
MES TABLES...

# LE CALCUL

Calculer signifie utiliser une série d'opérations permettant de trouver la réponse à un problème de « calcul ». Toutes les opérations mathématiques impliquent des calculs.

Dans les temps reculés, on utilisait des pierres pour compter. Les anciens Grecs se servaient de cailloux pour compter et pour faire des calculs élémentaires. Le mot moderne « calcul » vient de sa racine latine *calculus*, le caillou.

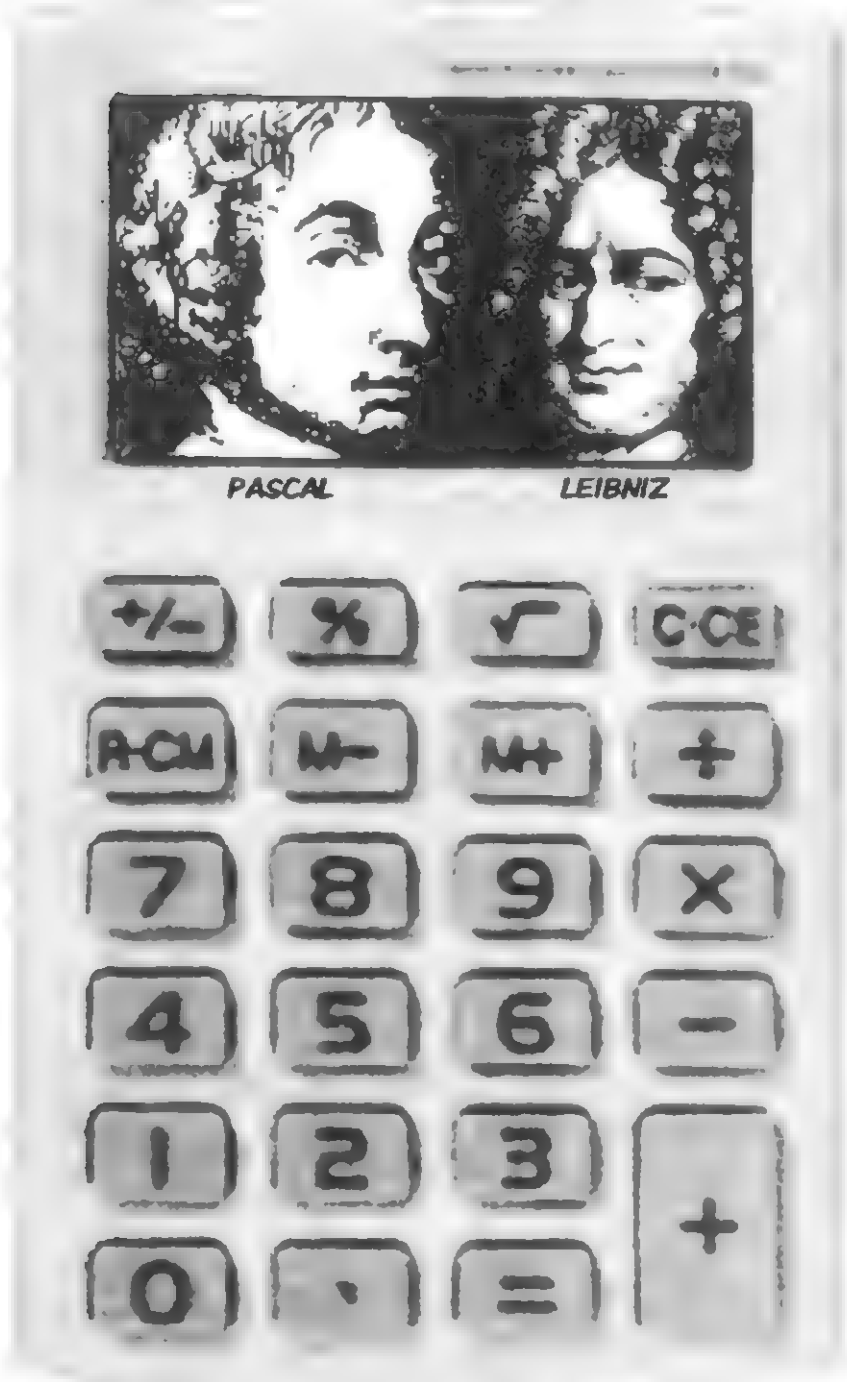
**RITHMES**

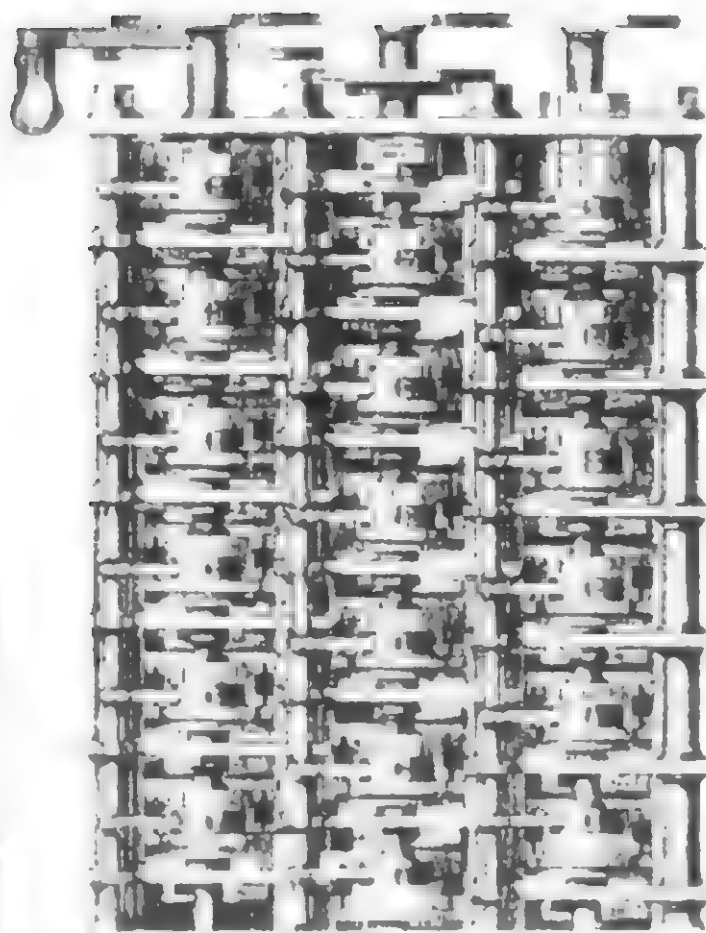
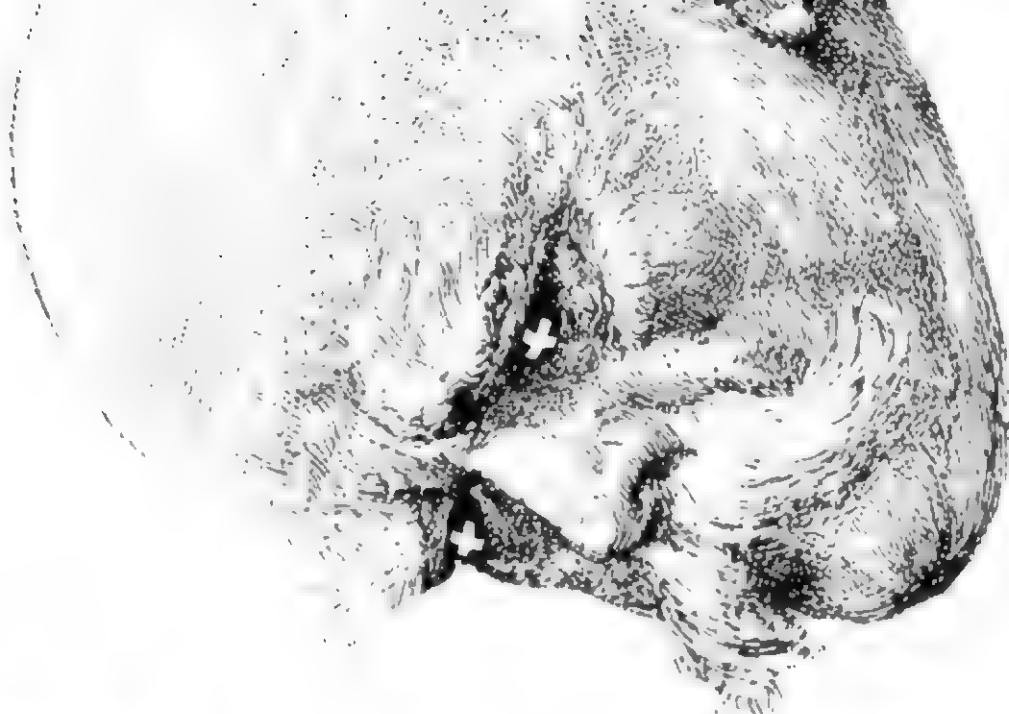
6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7151	7152	7153	7154	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7155	7156	7157	7158	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7159	7160	7161	7162	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7163	7164	7165	7166	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7167	7168	7169	7170	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7171	7172	7173	7174	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7175	7176	7177	7178	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7179	7180	7181	7182	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7183	7184	7185	7186	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7187	7188	7189	7190	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7191	7192	7193	7194	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7195	7196	7197	7198	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7199	7200	7201	7202	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7203	7204	7205	7206	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7207	7208	7209	7210	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7211	7212	7213	7214	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7215	7216	7217	7218	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7219	7220	7221	7222	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7223	7224	7225	7226	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7227	7228	7229	7230	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7231	7232	7233	7234	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7235	7236	7237	7238	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7239	7240	7241	7242	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7243	7244	7245	7246	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7247	7248	7249	7250	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7251	7252	7253	7254	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7255	7256	7257	7258	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7259	7260	7261	7262	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7263	7264	7265	7266	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7267	7268	7269	7270	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7271	7272	7273	7274	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7275	7276	7277	7278	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7279	7280	7281	7282	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7283	7284	7285	7286	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7287	7288	7289	7290	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7291	7292	7293	7294	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7295	7296	7297	7298	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7299	7300	7301	7302	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7303	7304	7305	7306	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7307	7308	7309	7310	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7311	7312	7313	7314	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7315	7316	7317	7318	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7319	7320	7321	7322	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7323	7324	7325	7326	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7327	7328	7329	7330	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7331	7332	7333	7334	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7335	7336	7337	7338	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7339	7340	7341	7342	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7343	7344	7345	7346	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7347	7348	7349	7350	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7351	7352	7353	7354	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7355	7356	7357	7358	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7359	7360	7361	7362	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7363	7364	7365	7366	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7367	7368	7369	7370	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7371	7372	7373	7374	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7375	7376	7377	7378	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7379	7380	7381	7382	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7383	7384	7385	7386	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7387	7388	7389	7390	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7391	7392	7393	7394	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7395	7396	7397	7398	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7399	7400	7401	7402	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7403	7404	7405	7406	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7407	7408	7409	7410	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7411	7412	7413	7414	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7415	7416	7417	7418	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7419	7420	7421	7422	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7423	7424	7425	7426	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7427	7428	7429	7430	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7431	7432	7433	7434	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7435	7436	7437	7438	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7439	7440	7441	7442	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7443	7444	7445	7446	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7447	7448	7449	7450	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7451	7452	7453	7454	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7455	7456	7457	7458	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7459	7460	7461	7462	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7463	7464	7465	7466	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7467	7468	7469	7470	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7471	7472	7473	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7475	7476	7477	7478	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7479	7480	7481	7482	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7483	7484	7485	7486	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7487	7488	7489	7490	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7491	7492	7493	7494	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7495	7496	7497	7498	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7499	7500	7501	7502	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7503	7504	7505	7506	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7507	7508	7509	7510	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7511	7512	7513	7514	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7515	7516	7517	7518	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7519	7520	7521	7522	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7523	7524	7525	7526	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7527	7528	7529	7530	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7531	7532	7533	7534	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7535	7536	7537	7538	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7539	7540	7541	7542	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7543	7544	7545	7546	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7547	7548	7549	7550	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7551	7552	7553	7554	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7555	7556	7557	7558	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7559	7560	7561	7562	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7563	7564	7565	7566	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7567	7568	7569	7570	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7571	7572	7573	7574	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7575	7576	7577	7578	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7579	7580	7581	7582	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7583	7584	7585	7586	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7587	7588	7589	7590	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7591	7592	7593	7594	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7595	7596	7597	7598	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7599	7600	7601	7602	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7603	7604	7605	7606	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7607	7608	7609	7610	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7611	7612	7613	7614	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7615	7616	7617	7618	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7619	7620	7621	7622	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7623	7624	7625	7626	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7627	7628	7629	7630	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7631	7632	7633	7634	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7635	7636	7637	7638	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7639	7640	7641	7642	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7643	7644	7645	7646	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7647	7648	7649	7650	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7651	7652	7653	7654	1	2	2	3	4	5	5	6	7
7655	7656	7657	7658	1	2	2	3	4	5	5		

Les machines à calculer se présentent sous deux formes de base : la machine simple, à additionner (ou à soustraire) et les calculateurs (calculatrices maintenant) qui non seulement peuvent faire des multiplications et des divisions...



Nous devons l'invention, en 1642, de la première machine à additionner au Français **Blaise Pascal** (1623–1662), capable d'additionner et de « poser » un chiffre (pour le calcul de la dizaine supérieure). En 1671, le mathématicien et philosophe allemand **Gottfried Wulhem von Leibniz** (1646–1716) a proposé un dispositif capable de multiplier en procédant par des additions successives.





En 1822, l'inventeur et mathématicien britannique **Charles Babbage** (1792–1871) a construit une petite machine à additionner. Dix ans plus tard, il conçoit une « machine à différences » (les nombres entiers et base 10 étant représentés par des roues dentées ; son fonctionnement est fondé sur des « différences finies » qui permettent de résoudre des multiplications par additions successives). Par la suite, il envisage un « engin analytique » qui n'a jamais été assemblé (en raison du coût notamment). Une réplique partielle existe et peut être vue au *Science Museum* de Londres.

LES CALCULS,  
QUELLE QU'EN SOIT LA  
COMPLEXITÉ, NE SUFFISENT  
PAS TOUJOURS À RÉSOUDRE  
DES PROBLÈMES. PARFOIS,  
NOUS AVONS RECOURS  
À DES ÉQUATIONS.





# LES ÉQUATIONS


Les équations constituent le cœur des mathématiques. À la seule exception d'opérations arithmétiques très élémentaires, on se sert d'équations dans toutes les disciplines des mathématiques théoriques et appliquées, ainsi que dans les sciences physiques, sociales et la biologie.

Comme son nom l'indique, une équation énonce une égalité entre deux expressions. Elle implique des quantités inconnues ; en général, nous les appelons «**variables**» tandis que d'autres valeurs sont des «**constantes**», ou bien des **paramètres**. Les équations peuvent encore servir à définir les quantités elles-mêmes ou à exprimer des rapports entre variables.



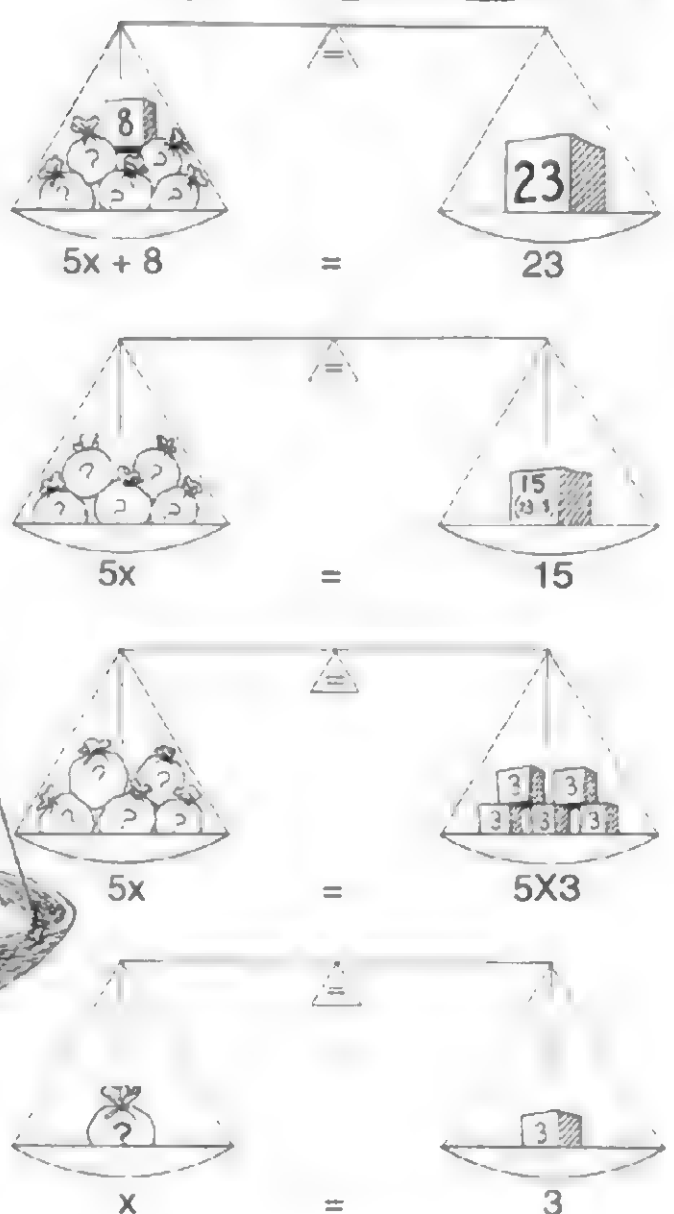
Avant même que soit inventé le concept de l'équation, des problèmes mathématiques ont été résolus au moyen de méthodes ingénieuses et compliquées. De nos jours, ils sont «réduits» à une forme très simple.

Dans l'équation  $5x + 8 = 23$ ,  $x$  est l'inconnue qu'il faut trouver par le calcul. On peut y parvenir avec des essais, « au pifomètre » dirions-nous, jusqu'à obtenir la bonne réponse, ou effectuer de simples opérations (on soustrait 8 de chaque côté, puis on divise les deux côtés par 5).



UNE ÉQUATION, C'EST COMME UNE BALANCE, AVEC LE SIGNE ÉGAL PLACÉ AU POINT D'ÉQUILIBRE.

MOI, JE SUIS «X», LA «QUANTITÉ INCONNUE» ET NOUS SOMMES CINQ IDENTIQUES.



$5x + 8 = 23$

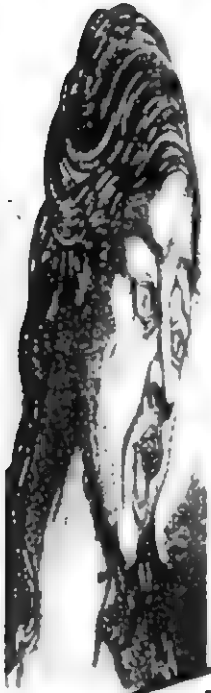
$5x = 15$

$5x = 5 \times 3$

$x = 3$

L'équation est « satisfaite », ou résolue, avec  $x = 3$ , puisque les deux côtés de l'équation sont toujours égaux.

Dès lors que toute valeur des variables résout une équation, celle-ci s'appelle une **identité**. Par exemple, l'équation  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$  est une identité puisqu'elle reste satisfaite quelles que soient les valeurs attribuées aux inconnues. De telles identités se révèlent très utiles pour des manipulations algébriques, dans la mesure où elles permettent de remplacer une formulation complexe par une forme plus simple.



LES ÉQUATIONS  
DITES «LINÉAIRES» NE  
COMPORTENT QUE DES INCONNUES  
ÉLEVÉES À LA PUISSANCE 1, TELLES  
QUE  $5x + 8 = 23$ . ELLES SONT  
QUALIFIÉES DE «LINÉAIRES» PARCE  
QUE LEUR REPRÉSENTATION SUR UN  
GRAPHIQUE PLAN DONNE UNE  
DROITE.



LES ÉQUATIONS DITES  
«QUADRATIQUES» ONT UNE  
VARIABLE ÉLEVÉE À LA PUISSANCE 2.  
CES ÉQUATIONS POSSÈDENT TOUJOURS DEUX  
RACINES (OU SOLUTIONS), SOIT DIFFÉRENTES  
SOIT ÉGALES. PAR EXEMPLE, LES ÉQUATIONS  $x^2 = 4$  ET  $2x^2 - 3x + 3 = 5$  SONT TOUTES LES DEUX  
«QUADRATIQUES», AVEC POUR SOLUTION  $(+2, -2)$   
ET  $(+2, -1/2)$  RESPECTIVEMENT. UN CAS DE  
DEUX RACINES ÉGALES EST DONNÉ PAR  $x^2 - 4x + 4 = 0$ , LES DEUX SOLUTIONS  
ÉTANT 2.



LES ÉQUATIONS  
CUBIQUES POSSÈDENT UNE  
VARIABLE ÉLEVÉE À LA PUISSANCE 3.  
DE TELLES ÉQUATIONS ONT TOUJOURS TROIS  
RACINES, QUAND BIEN MÊME DEUX VOIRE TROIS  
PARMI ELLES SONT IDENTIQUES (ET DEUX MAIS  
JAMAIS TROIS PEUVENT ÊTRE COMPLEXES).  
UN EXEMPLE D'ÉQUATION CUBIQUE EST  
 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$  AVEC COMME  
SOLUTIONS LES RACINES  
1, 2 ET 3.

Les équations linéaires, quadratiques et cubiques sont qualifiées de premier, second et de troisième degré respectivement. Jusque l'équation appelée « quartique » (4<sup>e</sup> degré), il est possible d'exprimer les racines par des formules qui font appel à des racines arithmétiques ou à des racines carrées. Ainsi, pour l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$ , la formule s'écrit :

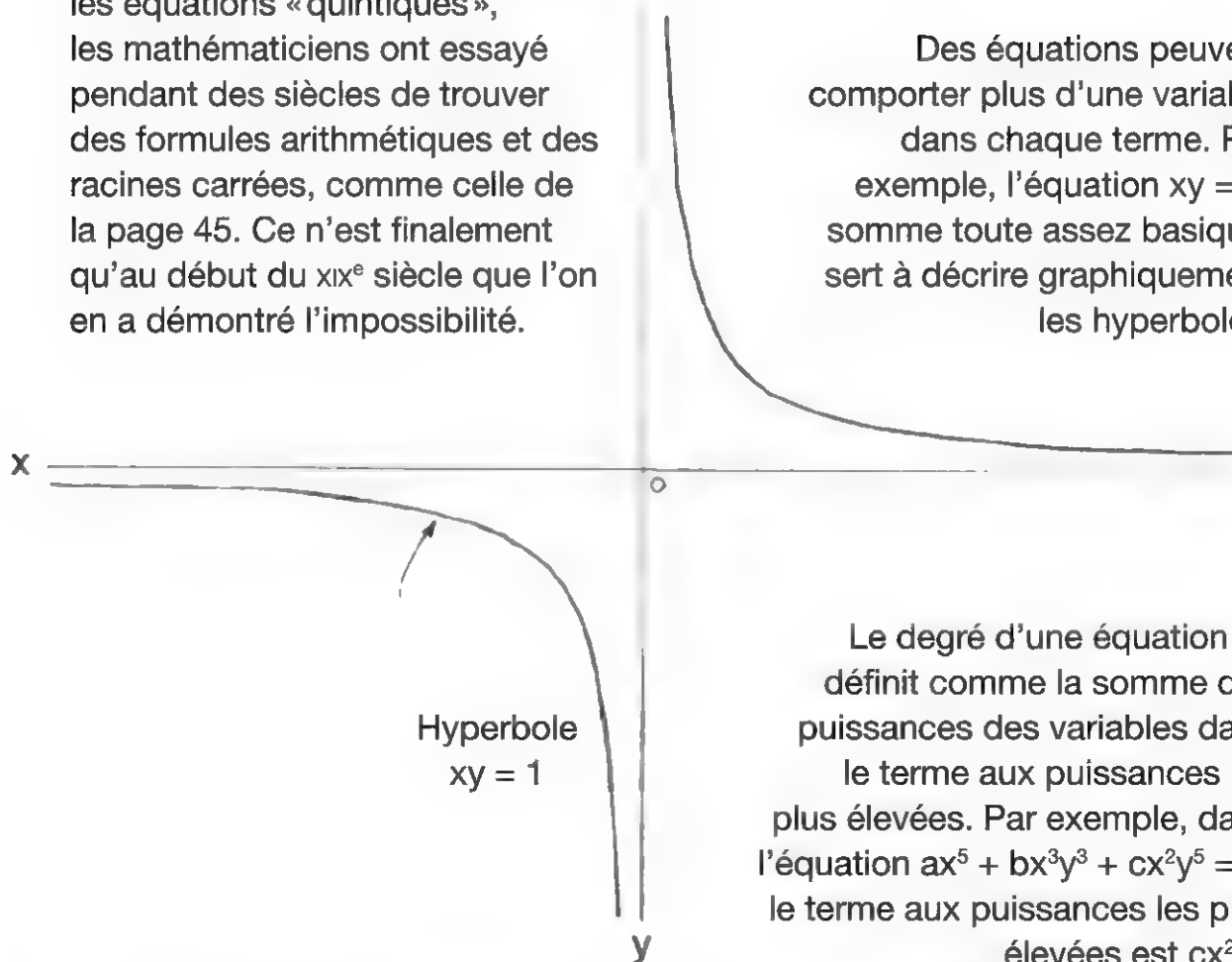
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



L'EXPRESSION  
SOUS LA RACINE  
CARRÉE ( $\sqrt{\quad}$ ) PEUT AVOIR UNE  
VALEUR INFÉRIEURE À ZÉRO;  
DANS CE CAS, NOUS AURONS  
UNE PAIRE DE RACINES  
« COMPLEXES ».

Il n'y a pas de limites au nombre de degrés des équations algébriques. Cependant, au 5<sup>e</sup> degré, pour ce que l'on appelle les équations « quintiques », les mathématiciens ont essayé pendant des siècles de trouver des formules arithmétiques et des racines carrées, comme celle de la page 45. Ce n'est finalement qu'au début du XIX<sup>e</sup> siècle que l'on en a démontré l'impossibilité.

Des équations peuvent comporter plus d'une variable dans chaque terme. Par exemple, l'équation  $xy = 1$ , somme toute assez basique, sert à décrire graphiquement les hyperboles.



Le degré d'une équation se définit comme la somme des puissances des variables dans le terme aux puissances les plus élevées. Par exemple, dans l'équation  $ax^5 + bx^3y^3 + cx^2y^5 = 0$ , le terme aux puissances les plus élevées est  $cx^2y^5$ .







Normalement, une équation avec deux variables n'a pas de solution. Mais, s'il y a autant de formules que de variables, on a une chance de parvenir à trouver une solution pour chaque variable. Un système d'équations simultanées comporte donc deux ou davantage d'équations avec deux ou plus d'inconnues. Parfois, on peut les résoudre par de simples manipulations.

Prenons, pour illustrer cette possibilité :

- |  |   |
|--|---|
| <p>1. <math>2x + xy + 3 = 0</math><br/><math>x + 2xy = 0.</math></p> <p>2. Si nous multiplions la première équation par 2, on obtient :<br/><math>4x + 2xy + 6 = 0.</math></p> | <p>3. Et si nous soustrayons la seconde équation, on obtient :<br/><math>3x + 6 = 0.</math></p> <p>4. Ainsi, nous pouvons conclure que <math>x = -2.</math></p> |
|--|---|

À présent, si nous substituons la valeur  $-2$  dans la première équation, on obtient  $y = -1/2.$

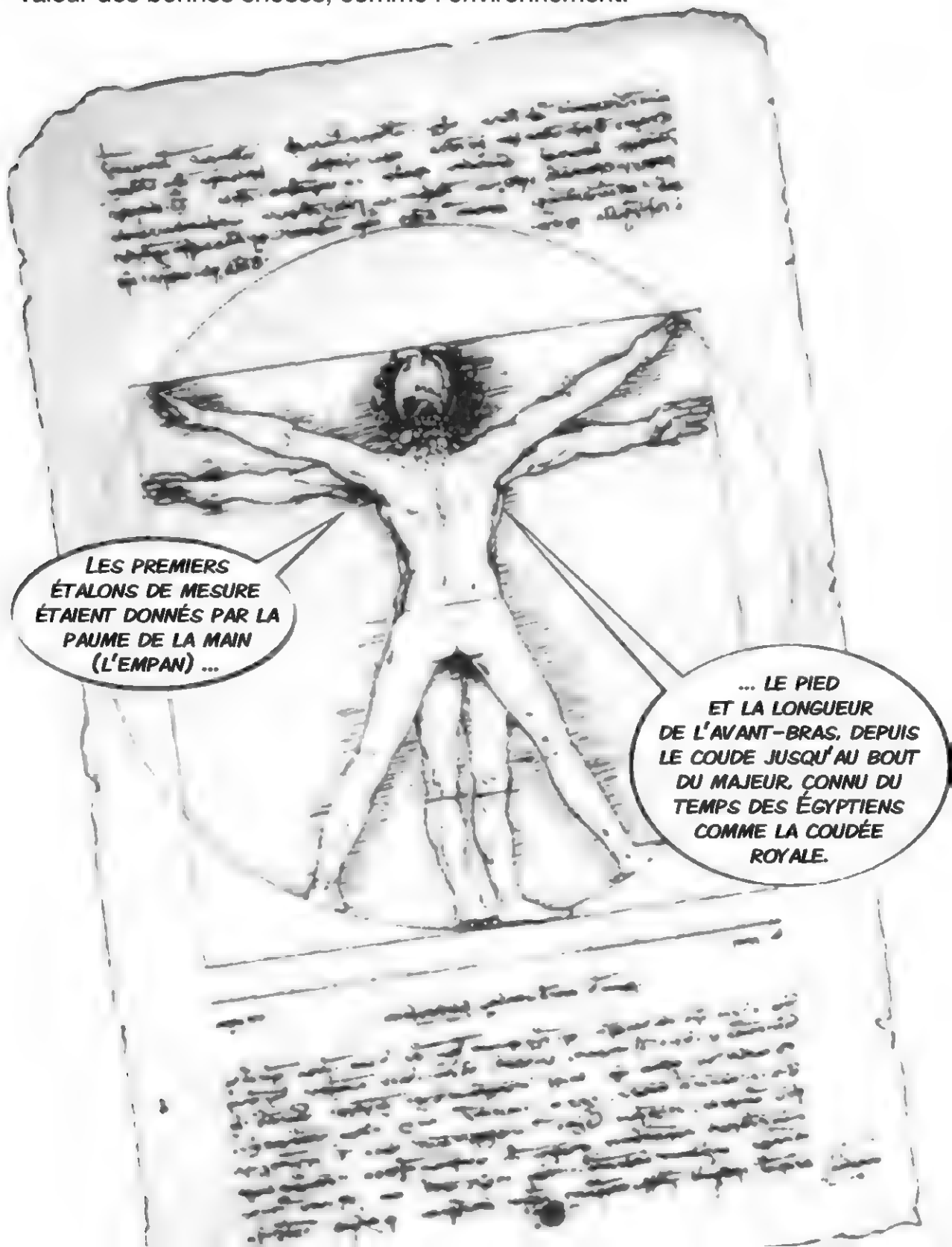
Parfois, on réussira à résoudre des équations simultanées plus complexes en procédant de la même manière.





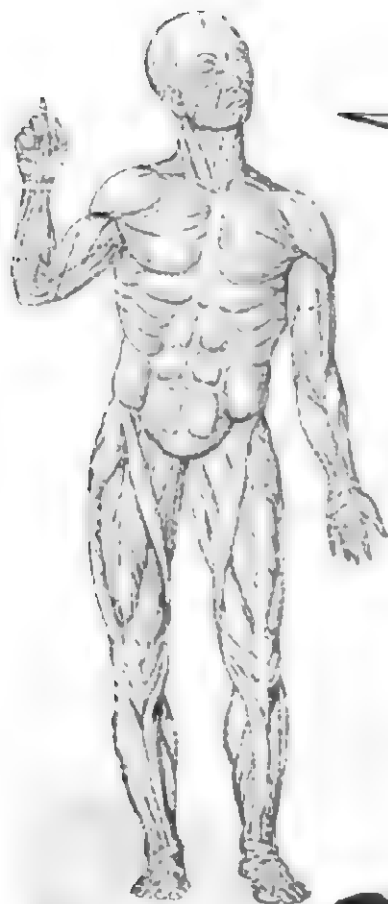
## LES MESURES

Les mesures font partie intégrante des mathématiques. Nous mesurons tout, depuis le temps aux dimensions, poids et volumes, tailles ou altitudes, électricité, chaleur, lumière – et même la distance aux étoiles et les énergies des particules subatomiques. Nous savons même mesurer l'intelligence et la valeur des bonnes choses, comme l'environnement.



**LES PREMIERS  
ÉTALONS DE MESURE  
ÉTAIENT DONNÉS PAR LA  
PAUME DE LA MAIN  
(L'EMPAN) ...**

**... LE PIED  
ET LA LONGUEUR  
DE L'AVANT-BRAS, DEPUIS  
LE COUDE JUSQU'AU BOUT  
DU MAJEUR, CONNU DU  
TEMPS DES ÉGYPTIENS  
COMME LA COUDÉE  
ROYALE.**



**DE NOS JOURS, LES  
MESURES SONT BASÉES  
SUR LA SCIENCE.**

Le système international d'unités (SI), inspiré du système métrique introduit par les Français du temps de la Révolution (7 avril 1795), offre un ensemble d'unités interconnectées, dérivées de quantités « basiques », telles que le mètre (m) pour les longueurs, la seconde (s) pour l'écoulement du temps et le kilogramme (kg) pour les masses. La plupart des mesures pratiques s'expriment en puissance de 10 de ces unités, par exemple le millimètre (mm).

**LES MESURES  
DU TEMPS FONT  
EXCEPTION. LA TENTATIVE  
DES RÉFORMATEURS  
FRANÇAIS POUR DIVISER LE  
MOIS EN TROIS « DÉCADES »  
DE 10 JOURS CHACUNE, PUIS  
LA JOURNÉE EN 10 HEURES\*,  
CHACUNE AVEC 100 MINUTES,  
S'EST RÉVÉLÉE TRÈS  
IMPOPULAIRE ET C'EST AINSI  
QUE NOUS CONTINUONS À  
UTILISER LE SYSTÈME  
(BASE 60) INVENTÉ  
EN BABYLOIE.**

\*Pour la petite histoire, il existe une horloge « décadique » en état de marche au Bureau des longitudes, quai Conti, Paris 6<sup>e</sup>, dans les locaux de l'Institut de France.

Chacune des unités du SI possède une définition précise et des protocoles de mesure soumis au contrôle des comités internationaux officiels (par le biais du Bureau international des poids et mesures). Les définitions évoluent et sont mises à jour chaque fois que de meilleures méthodes apparaissent.



AU DÉPART,  
LE MÈTRE ÉTAIT  
DÉFINI COMME LA  
DIX MILLIONIÈME PART  
DU QUART DU MÉRIDIEN  
TERRESTRE PASSANT PAR  
PARIS; AU XX<sup>e</sup> SIÈCLE, IL  
ÉTAIT MESURÉ EN FONCTION  
DE LA VITESSE DE LA  
LUMIÈRE ET AUJOURD'HUI,  
IL EST MESURÉ EN  
LONGUEURS D'ONDE  
D'UNE COULEUR  
BIEN PRÉCISE.

De nombreux pays conservent encore le vieux système des mesures « impériales » : la livre (poids), le yard (toise), la pinte et les quarts (1 quart = 2 pintes). Mais attention, la pinte US, le quart US et le gallon US ne font que les 4/5 de leurs équivalents britanniques; de même que les voitures américaines, qui ont la réputation d'engloutir l'essence et affichent un ratio bas de miles/gallon...

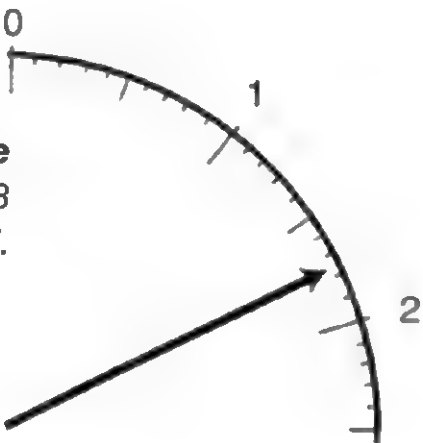


... NE SONT PAS  
AUSSI MAUVAISES  
QU'IL N'Y PARAÎT.



AH! CES  
DAMNÉS  
COLONIAUX!

Compter et calculer traitent de quantités différentes, discrètes et qui n'impliquent que des nombres exacts. Par opposition, la mesure traite d'ordres de grandeur continus. Aucune mesure n'est exacte. Quand nous comparons l'objet que l'on mesure à un étalon, nous faisons toujours une interpolation entre les points sur l'échelle la plus fine. Et tout rapport d'une mesure complexe doit (ou devrait) inclure une « barre d'erreur » qui indique la marge d'incertitude associée à la mesure.



**Mesure**

L'aiguille se trouve entre 1,7 et 1,8  
et nous estimons la mesure à 1,77.

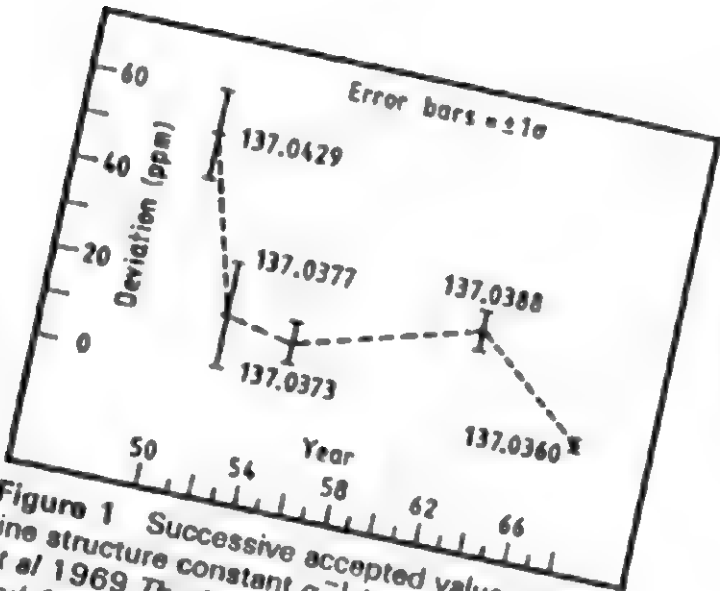


Figure 1 Successive accepted values of the fine structure constant  $\alpha^{-1}$  (from B N Taylor et al 1969 The Fundamental Constants and Quantum Electrodynamics London: Academic p7)

DES MESURES  
SANS ERREUR  
SERAIENT COMME DES  
PRODUITS VENDUS SANS  
LE NOM DES FABRICANTS;  
L'UTILISATEUR SE TROUVE  
PRIVÉ D'UNE INFORMATION  
IMPORTANTE QUANT  
À LA QUALITÉ DU  
PRODUIT.

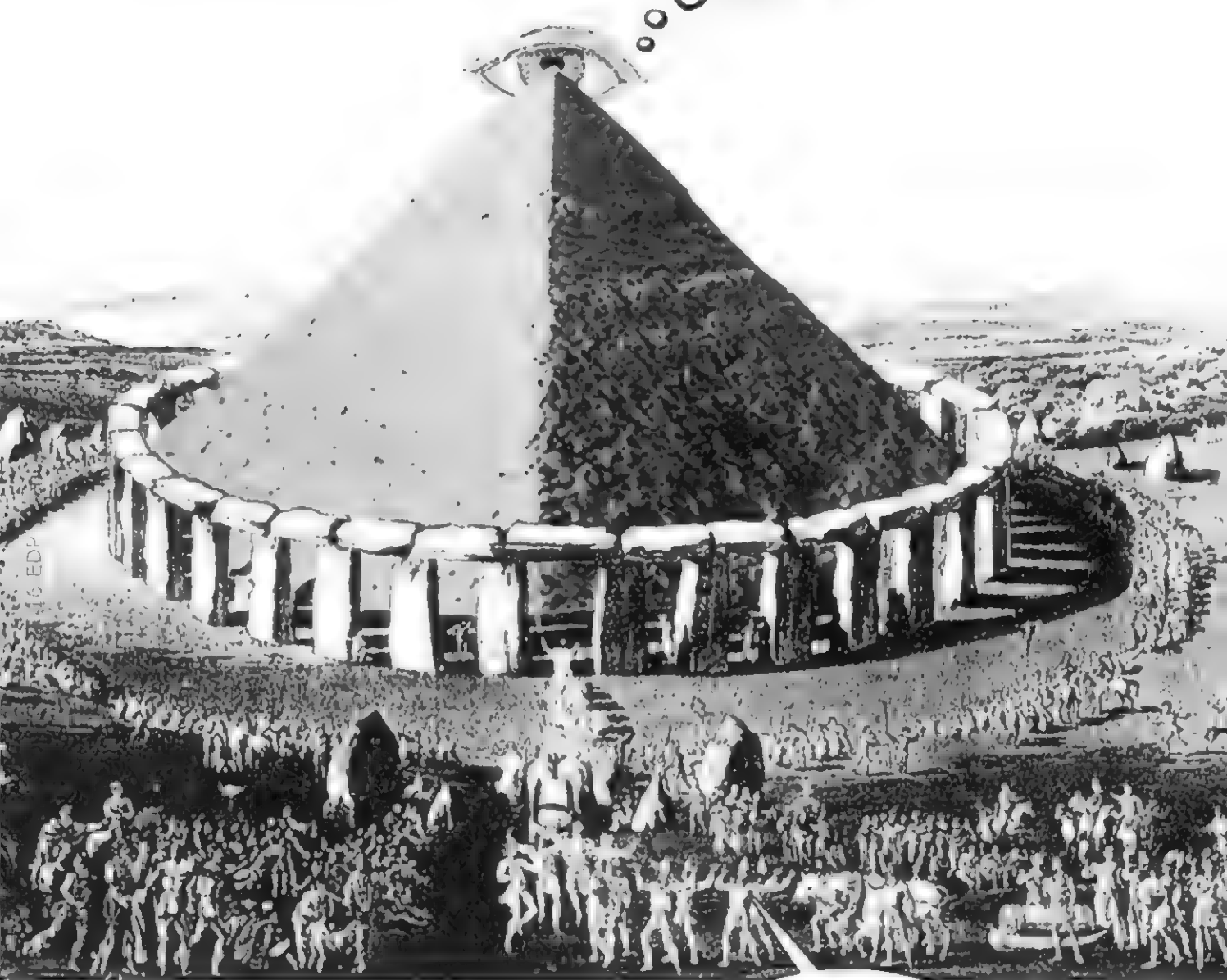


MAIS IL DIT  
LA MÊME CHOSE.  
ET DEPUIS  
TOUJOURS.



Depuis la Préhistoire, les mesures ont servi à construire des édifices. Les archéologues ont découvert, par exemple, que d'anciens monuments comme Stonehenge possédaient des alignements précis par rapport à des événements astronomiques et que la conception de leurs plans au sol faisait appel à des constructions géométriques. Les églises de l'Europe médiévale enfermaient ainsi de subtiles proportions de dimensions, si bien que pendant toute la période de la Renaissance, la théorie de la « proportion divine » sous-tendait l'architecture et l'art. La construction des grandes pyramides d'Égypte présentait un défi de compréhension pour des générations d'archéologues.

LES  
PROPORTIONS TROUVÉES  
DANS LES PYRAMIDES  
REPRÉSENTAIENT-ELLES  
QUELQUE RAPPORT  
MAGIQUE AUX  
NOMBRES ?



JE PENSE  
QU'UN JARDIN D'HIVER  
POURRAIT S'Y AJOUTER  
HARMONIEUSEMENT.

LES  
MATHÉMATIQUES  
DU DESIGN OFFRENT  
UN LIEN ENTRE  
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES  
ET «THÉORIQUES» DONT  
DISPOSAIENT DÉJÀ LA  
CIVILISATION DE LA  
GRÈCE ANTIQUE.

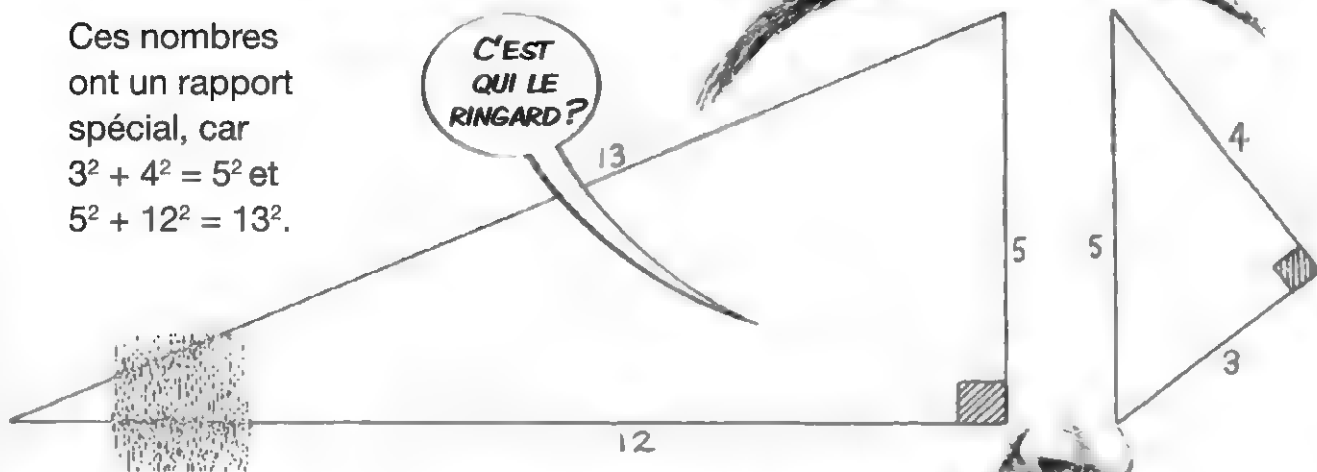
POUR POUVOIR  
MARQUER UN PLAN AU  
SOL, IL EST TRÈS UTILE  
DE SAVOIR CONSTRUIRE  
UN ANGLE DROIT, COMME  
LE COIN D'UN CARRÉ  
PAR EXEMPLE.

LES  
BABYLONIENS  
SAVAIENT BIEN QUE  
CERTAINS TRIANGLES  
CONTENAIENT UN  
ANGLE DROIT.

SI LES CÔTÉS  
SONT DE 3, 4 ET  
5 OU DE 5, 12 ET 13,  
ALORS LE COIN OPPOSÉ  
À L'HYPOTÉNUSE  
CONSTITUE UN  
ANGLE DROIT.

Ces nombres  
ont un rapport  
spécial, car  
 $3^2 + 4^2 = 5^2$  et  
 $5^2 + 12^2 = 13^2$ .

C'EST  
QUI LE  
RINGARD?



Les mathématiciens  
de Babylone avaient  
même produit des  
séries de tels «triplets»  
en appliquant sans  
doute une technique  
particulière de calcul  
pour y parvenir.


MAIS CE  
SONT LES GRECS  
QUI EN ONT FAIT  
UN THÉORÈME.



# LES MATHÉMATIQUES GRECQUES

À partir du VII<sup>e</sup> siècle avant J.-C., les Grecs ont peu à peu séparé leurs études sur les lois de la Nature des questions religieuses sur les rapports entre les Hommes et les dieux. **Thals de Milet** (c. 624 avant J.-C.), homme d'état grec et mathématicien, est celui dont Aristote disait qu'il avait ramené les mathématiques d'Égypte.

C'est cette approche qui devait caractériser toute la science et les mathématiques grecques par la suite. Les Grecs ont toujours cherché des théories « naturelles » pour comprendre et expliquer les cieux et la Terre.



JE ME  
SUIS BASÉ SUR LA  
GÉOMÉTRIE ÉGYPTIENNE,  
QUE J'AI PROLONGÉE  
POUR DONNER QUELQUES  
EXPLICATIONS PHYSIQUES  
À DES PHÉNOMÈNES  
OBSERVÉS DANS LA  
NATURE.

MAIS LES  
NOMBRES, EN  
TANT QUE TELS, ONT  
CONTINUÉ À EXERCER  
UNE FASCINATION  
MAGIQUE POUR NOUS  
AUTRES GRECS, TANT  
ILS REFLÉTAIENT LA  
SYMÉTRIE ET LA  
BEAUTÉ DE  
L'UNIVERS.

# PYTHAGORE

MOI, PYTHAGORE  
(580-500 AVANT J.-C.),  
JE N'ÉTAIS PAS UN SIMPLE  
MATHÉMATICIEN, J'AI ÉTÉ LEADER DE  
MA CITÉ ET J'AI FONDÉ UN CULTE  
MYSTIQUE QUI PRÔNAIT LA PRATIQUE  
D'EXERCICES ESTHÉTIQUES ET  
L'ABSTINENCE DE CERTAINES  
FORMES DE NOURRITURE ET  
D'ACTIVITÉS.


Ses condisciples avaient  
découvert que des  
harmonies simples en  
musique pouvaient être  
produites en combinant les  
sons d'instruments pouvant  
réaliser simultanément des  
rapports de longueur d'onde.

CELA NOUS A  
CONDUITS À CROIRE  
QUE LES MATHÉMATIQUES  
REFLÉTAIENT DES RAPPORTS  
DIVINS ET LA BEAUTÉ ELLE-  
MÊME - LES NOMBRES, AVEC  
LEURS QUALITÉS MAGIQUES,  
RENFERMAIENT LA  
RÉPONSE À TOUTE  
QUESTION.

On doit à Pythagore le  
célèbre théorème portant son nom,  
qui énonce que « si un triangle est rectangle alors le carré de la  
longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des  
longueurs des deux autres côtés » ; autrement dit :  $a^2 + b^2 = c^2$ .  
Comme nous venons de le voir, ce rapport des côtés était  
déjà connu, mais Pythagore était le premier à en esquisser  
une preuve générale. Bien que le récit du théorème n'ait été  
connu que quelques siècles après sa mort, cela correspond  
bien à ses efforts pour que les mathématiques ne soient  
pas considérées comme une étude pratique, mais qui  
aurait une portée philosophique.



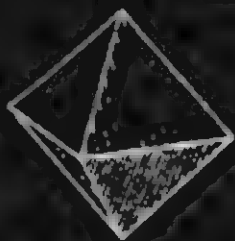
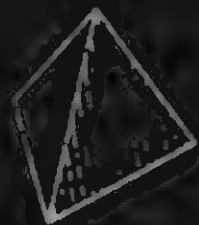
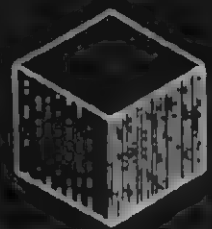




Les pythagoriciens admiraient des figures géométriques dites régulières, comme les polygones ou les « solides réguliers » (au nombre de cinq pour les formes convexes et pas une de plus). L'histoire veut que Pythagore en ait découvert trois : le tétraèdre (la pyramide, 4 faces et 8 arêtes), l'hexaèdre (le cube, 6 faces et 12 arêtes) et le dodécaèdre (12 faces et 30 arêtes). La légende veut que les mathématiciens de l'époque aient éprouvé une grande détresse en découvrant que certains rapports de ces figures ne pouvaient pas s'exprimer en nombres entiers. La « monstruosité » la plus facile à démontrer était le calcul de la diagonale d'un carré par rapport au côté ; maintenant nous disons que...



LA RACINE  
DE 2 ( $\sqrt{2}$ ) EST  
IRRATIONNELLE.





# LES PARADOXES DE ZÉNON

JE M'APPELLE  
ZÉNON D'ELÉE  
(490-430 AVANT J.-C.)  
ET JE SUIS DEVENU CÉLÈBRE  
GRÂCE À MES PARADOXES OÙ  
JE DÉFIAIS LES FONDEMENTS  
DE NOTRE FAÇON DE PENSER  
L'ESPACE, LE TEMPS ET  
LE CHANGEMENT  
D'ÉTAT.

Au moyen de quatre paradoxes, Zénon a essayé de démontrer que si nous concevons l'espace comme fini ou infiniment divisible, ou si nous considérons le mouvement comme simple ou relativiste, nous observerons inévitablement des paradoxes.

Le plus célèbre des paradoxes est celui d'Achille (champion de course à pied) qui poursuit une tortue. À chaque bond, il diminue de moitié l'avance de la tortue, encore et encore, puis constate...

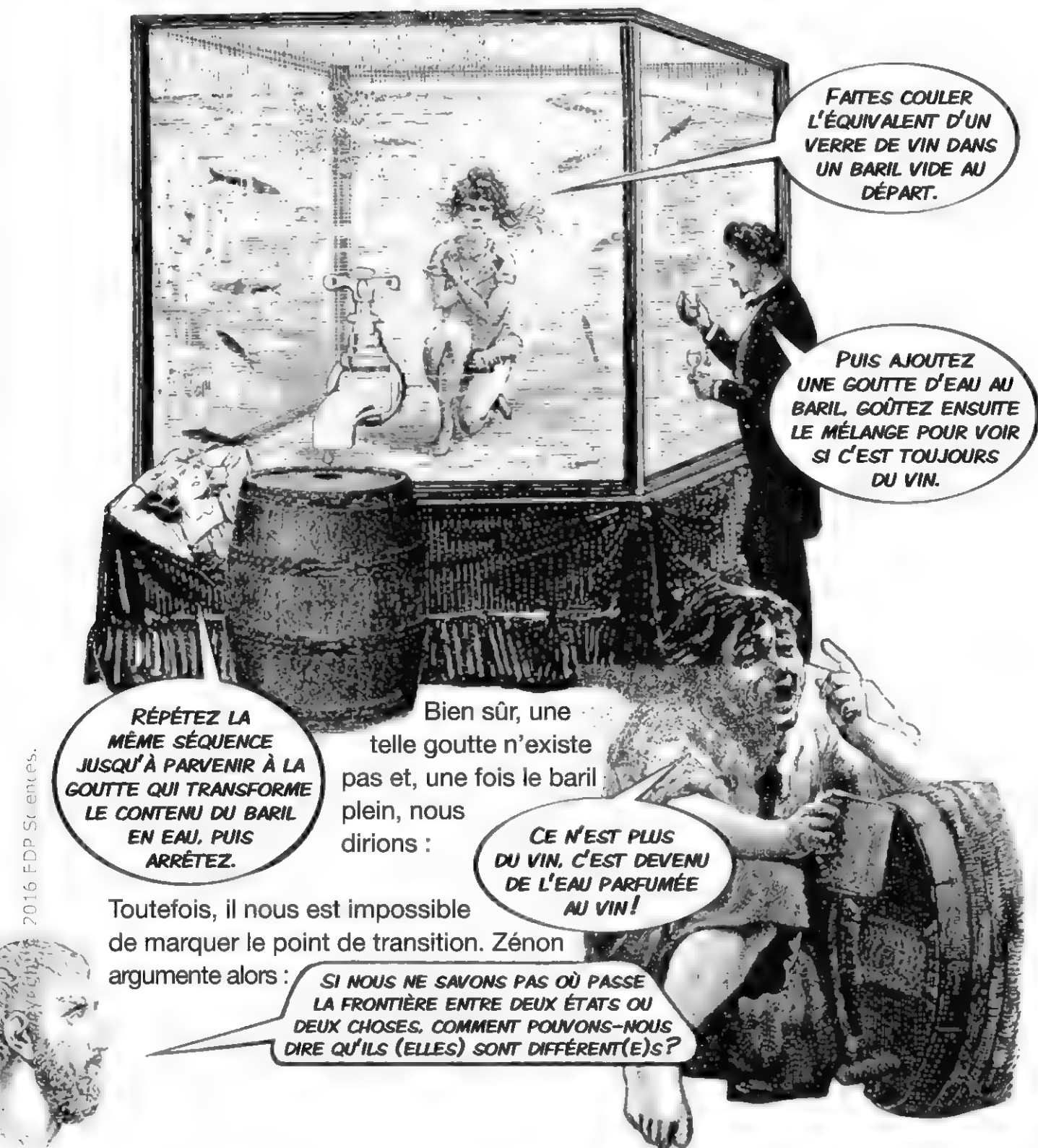


Avec cette analyse, comment expliquer alors qu'Achille réussit quand même à dépasser la tortue ?

Inutile de dire qu'il réussit après un nombre infini de bonds. En mathématiques modernes et rigoureuses, nous ne pouvons pas parler d'un « dernier » bond ni d'un « infini-terme » terme dans une série.

Ce paradoxe montre que si nous permettons à l'espace d'être infiniment divisible, nous aurons des paradoxes quand nous décrirons ces mouvements.

Zénon avait proposé trois autres paradoxes relatifs au mouvement et d'autres relatifs au changement en général. En voici un exemple. Supposons que vous ayez reçu les instructions suivantes...



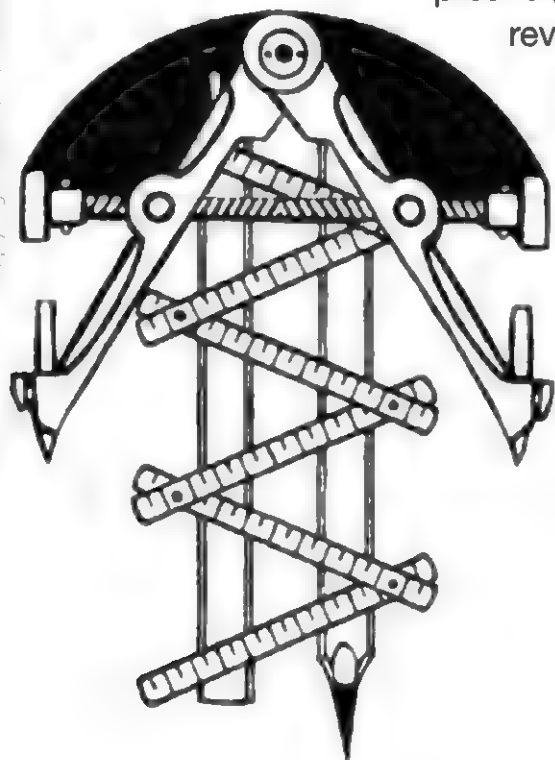
Les philosophes coururent après Zenon depuis le début, mais tout comme Achille, ils n'arrivent pas tout à fait à saisir leur proie. Peut-être Zénon avait-il quelque chose à nous dire sur nos concepts mathématiques. Nous aimerions croire que ces concepts sont clairs, mais peut-être sont-ils réellement contradictoires.

# EUCLIDE



MOI, EUCLIDE  
(323-285 AVANT  
J.-C.), SUIS LE  
PÈRE FONDATEUR  
DE LA GÉOMÉTRIE  
DÉMONSTRATIVE.

Ses idées devaient avoir un impact énorme sur les mathématiques occidentales et formaient la base de notre géométrie jusque très récemment. Euclide a rendu systématique la tradition de preuves basées sur des constructions, avec des instruments « idéaux » comme la règle et le compas (pour dessiner des arcs de cercle). Avec la règle et le compas, il était possible de démontrer des vérités relatives aux figures et à leurs formes, sans passer par des exemples numériques. C'était déjà un très grand changement pour les mathématiques grecques – l'idée d'apporter une preuve (par une démonstration) qui, dans un sens, revêtait une valeur abstraite.



Dans ses travaux, Euclide a fourni ses célèbres fondations de la géométrie et a défini les constructions nécessaires et suffisantes pour constituer une preuve. (D'autres constructions plus complexes étaient déjà connues à l'époque et rendaient même la preuve plus facile à démontrer, mais elles n'étaient pas considérées comme « géométriques » ou pertinentes.) Après avoir défini ses termes, tel que le point ou la droite, Euclide a énoncé cinq notions de quantité et cinq postulats de construction.

## Les notions communes d'Euclide

1. Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles  $a=c, b=c, a=b$

2. Des quantités égales additionnées donnent des quantités toujours égales

$$= + = = =$$

3. Des quantités égales soustraites l'une de l'autre donnent toujours des égales

$$= - = = =$$

4. Deux quantités qui coïncident sont égales

$$\text{😊} = \text{😊}$$

5. Le tout est plus grand qu'une partie


TOUJ

## Les 6 postulats d'Euclide :


Dans un plan, il est admis

1. qu'on peut tracer une droite d'un point quelconque à un point quelconque, 

2. qu'on peut prolonger indéfiniment une droite finie, dans les deux sens, 

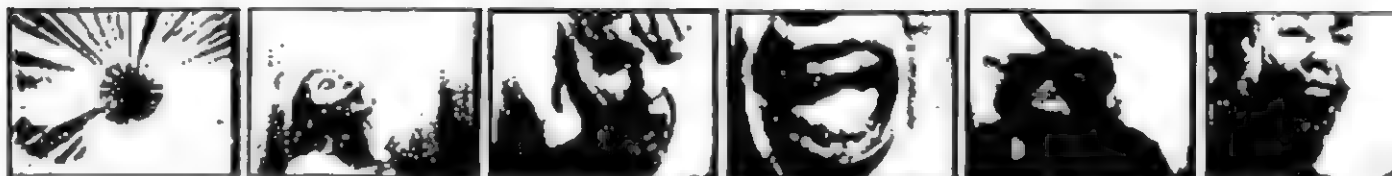
3. qu'on peut tracer un cercle, autour d'un point quelconque et avec un rayon quelconque, 

4. on admet que tous les angles droits sont égaux entre eux, 

5. et que si une droite, croisant deux autres droites, fait les angles intérieurs du même côté dont la somme est plus petite que deux angles droits, celles-ci prolongées, se rencontreront, 

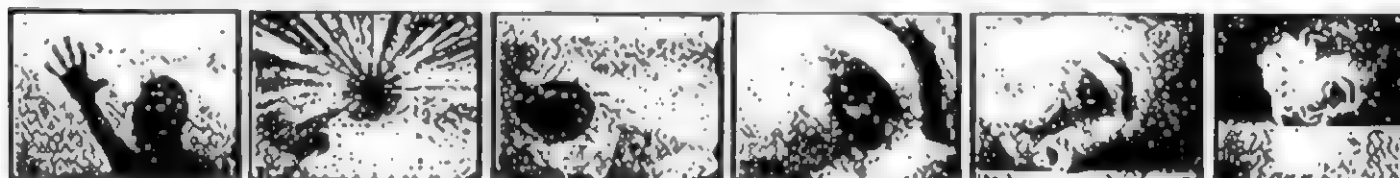
6. enfin que deux droites ne peuvent refermer l'espace.

Les trois premiers postulats définissent des méthodes de construction, mais les trois derniers sont en réalité des théorèmes. Le 5<sup>e</sup> postulat, appelé « postulat du parallélisme » était un défi constant pour des mathématiciens par la suite. À la longue, cependant, il est devenu la clef pour décrire d'autres formes de géométrie.



Sur cette base, Euclide a poursuivi son œuvre, déduisant tous les résultats géométriques connus de son temps, y compris le théorème de Pythagore. En dépit de leurs difficultés évidentes, ses axiomes furent réputés plus tard comme allant presque de soi et les conclusions qui en ont été tirées sont considérées comme autant de vérités. La géométrie était alors reconnue comme un magnifique exemple de connaissances véridiques auxquelles on ne pouvait accéder que par le seul raisonnement humain.

Après Euclide, les Grecs ont produit un autre très grand mathématicien, **Archimède** (287–212 avant J.-C.). C'est lui qui a astucieusement établi des méthodes pour mesurer les surfaces et les volumes de nombreux solides comme les sphères ou les cubes. Il a donné une valeur approximative à  $\pi$ ...





# LES MATHÉMATIQUES CHINOISES

Les Chinois n'ont jamais jugé utile de développer le style formel des preuves que nous voyons dans Les *Éléments* d'Euclide, car ils n'étaient pas réellement intéressés par la logique formelle. Les Chinois s'intéressaient bien davantage aux applications pratiques et n'ont pas étudié les mathématiques *per se*.



Cela ne les a pas empêchés d'inventer leur propre preuve pour la longueur des côtés d'un triangle droit, preuve bien différente de celle d'Euclide ; et, à la différence des Grecs, ils n'étaient pas trop dérangés par les surdes (nombres qui ne peuvent pas être exprimés sous la forme de ratio de deux entiers) ou par les nombres irrationnels. Pour exprimer un nombre négatif, les Chinois utilisaient simplement des bâtons rouges, et non noirs.

Les Chinois pratiquaient une algèbre sans recours à des symboles : ils exprimaient leurs idées *in extenso* avec des mots. Ils utilisaient l'abaque aussi bien pour les opérations algébriques que pour d'autres formes de calcul. Sous la dynastie Sung (960–1279), ils avaient mis au point une notation pour s'accommoder d'équations jusqu'à la 9<sup>e</sup> puissance ( $x^9$ ). Ils étaient capables de résoudre des équations linéaires simultanées (avec deux ou plus d'inconnues) et des équations quadratiques.

圖右左實法別分

實 法

式盤學初

左 右

實之首位 實之末位 法之首位 法之末位

實為子 為次位下位 法為母 靜

為前位上位

凡二至九粟位者用此置物為實以價為法呼九九合數口十就身言如隔位從末位算起用九歸還原

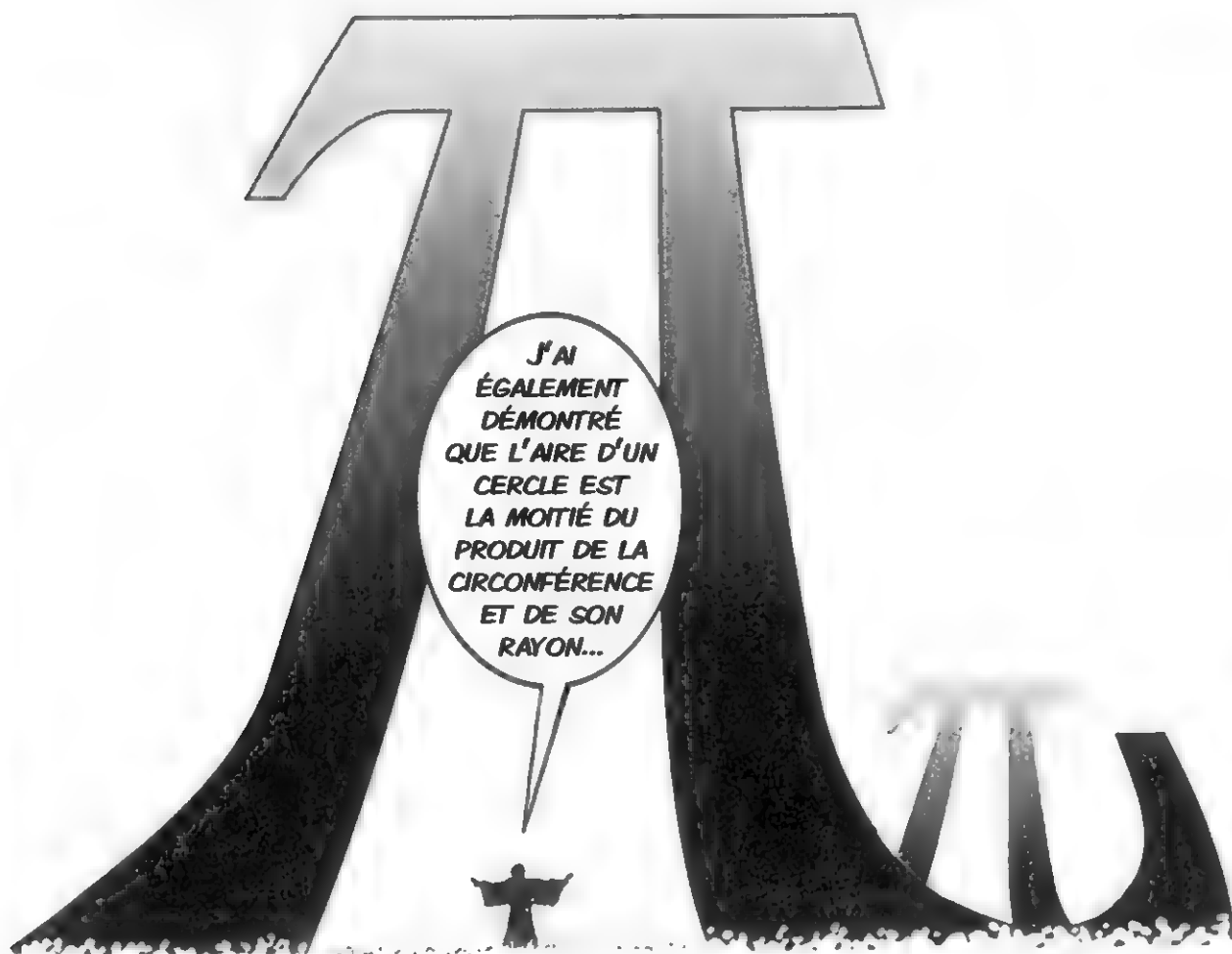
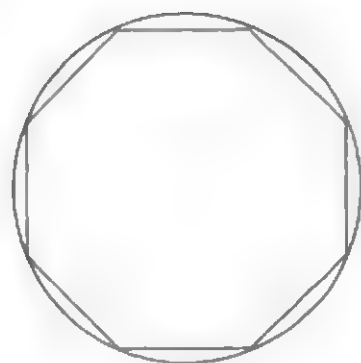
九因

原本直指算法統宗卷之二 新安 賓集程大位汝思甫 編

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Ils s'intéressaient aux « carrés magiques », dont l'addition du contenu des cases donne le même total que l'on prenne une ligne horizontale, une ligne verticale ou la diagonale. Ils ont même conçu, sur un principe identique, des cubes magiques.

Les Chinois s'enthousiasmaient à l'idée d'obtenir une valeur exacte pour  $\pi$ . **Liu Hui**, qui vivait au III<sup>e</sup> siècle après J.C., l'un des premiers mathématiciens chinois, en a donné une estimation au 4<sup>e</sup> chiffre après la virgule. Il a mis en œuvre la technique dite de « l'épuisement » en inscrivant un polygone dans un cercle; en augmentant progressivement le nombre de côtés du polygone, ceux-là deviennent de plus en plus courts, de sorte que l'on peut assimiler le périmètre du polygone à la circonférence du cercle.



Au v<sup>e</sup> siècle, le père **Tsu Ch'ung Chih** (429–500) et son fils **Tsu Keng-Chih** sont parvenus à la précision 3,141 592 6 et 3,141 592 7 respectivement, en appliquant la méthode d'Archimède des polygones inscrits (avec 24 576 arêtes). Cette précision n'a été atteinte en Occident qu'à la fin du xvi<sup>e</sup> siècle quand François Viète, en 1593, a su trouver une valeur exactement à mi-chemin entre les deux limites citées, soit 3,141 592 65.

# LE LIVRE CHIU CHANG

Le Chiu Chang est le plus célèbre des livres sur les mathématiques chinoises. Nous en ignorons le nom de l'auteur et la date exacte de sa rédaction, mais nous pouvons supposer que le livre date de la fin de la dynastie Chin ou du début de celle des Han (1<sup>er</sup> siècle de notre ère). Les sujets que l'(es) auteur(s) traite(nt) sont :

- les arpentages (y compris des additions et soustractions de fractions), les proportions (pourcentages);
- les distributions de proportions (progressions arithmétiques et géométriques, règle de 3);
- les mesures de terrains (racines carrées et cubiques sur une base géométrique);
- un texte de référence pour les ingénieurs (les objets 3D);
- des impôts justes (le temps d'aller de a à b et la distribution);
- une section « trop » ou « pas assez » (des énigmes de distribution avec des « pièges »);
- la méthode des tables (résolution d'équations simultanées avec deux ou trois inconnues, à partir de tables);
- et, enfin, les triangles droits (24 problèmes à résoudre avec calculs de longueur de côtés).

孟子說孩提之童無不知愛其親也只看孩提

心萬不容已既不能放下他又肯輕動着他所以

父母便一時也難過文王雖

孩

LA PORTÉE  
ET LA PROFONDEUR DU  
CHIU CHANG NOUS RÉVÈLENT  
LE NIVEAU DE SOPHISTICATION DES  
MATHÉMATICIENS CHINOIS AU  
DÉBUT DE L'ÈRE CHRÉTIENNE  
EN OCCIDENT.



# QUATRE MATHÉMATICIENS CHINOIS

La seconde moitié du  $\text{XIII}^{\text{e}}$  siècle et le début du  $\text{XIV}^{\text{e}}$  peuvent être considérés comme l'apogée des mathématiques chinoises. Quatre parmi les plus célèbres mathématiciens chinois vivaient à cette époque-là, à savoir :



Il y avait, en ces temps reculés, plus de trente écoles de mathématiques dans toute la Chine et la maîtrise des mathématiques étaient l'un des sujets obligatoires au concours d'admission à la fonction publique.

Chin Chiu Shao était l'un des meilleurs mathématiciens que la Chine ait jamais eu ; il a travaillé pour la fonction publique civile et militaire. Son livre, intitulé *Shu Chiu Chang* (Les neuf chapitres mathématiques), introduisait des idées nouvelles, comme, et pour la première fois, l'analyse dite indéterminée (étude des problèmes n'ayant pour solution que des nombres entiers).

[illegible]

**ET AINSI  
DE SUITE...**



Le triangle de Pascal s'avère utile pour l'analyse des probabilités. La seconde rangée montre le nombre de permutations possibles quand on lance deux pièces d'argent. Il y a une façon de retrouver deux « faces », deux façons de retrouver une « face » et une « pile », et une façon de retrouver deux « piles ».



Sous la dynastie des Sung, il a été expliqué par le mathématicien **Chia Hsien** (c. 1100) et sa découverte en Chine remonte peut-être plus loin encore.

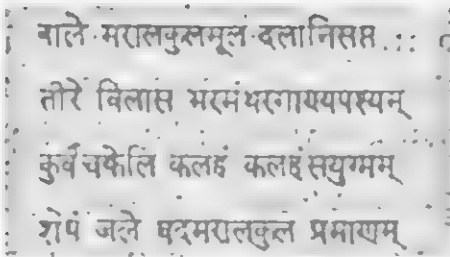


Tout comme les Chinois, les mathématiciens indiens avaient recours à toutes sortes de preuves, y compris des démonstrations visuelles qui n'avaient aucun rapport avec un quelconque système formel de déduction logique. Les mathématiques indiennes découlent d'un cadre de formalisme développé par les logisticiens et linguistes indiens. On identifie quatre phases bien distinctes des mathématiques en Inde.

La période Harappa, qui s'étend de 2500 avant J.-C. à environ 1000 avant J.-C., avec ce qu'il convient d'appeler des protomathématiques (notamment utiles pour les constructions en brique...).

La période védique, qui a duré 1 000 ans, traitait essentiellement de géométries rituelles. Les cultes du jainisme et du bouddhisme ont aussi pris leur essor pendant cette deuxième période.

La période suivante est qualifiée de « classique » et dure jusqu'à l'an 1000 de notre ère. Les mathématiciens de cette ère classique se préoccupaient de développer des concepts découverts plus tôt, tels que la théorie des nombres, les algorithmes et l'algèbre.



Poème du mathématicien indien Bhaskara (cf. page ci-contre).

La dernière grande période des mathématiques indiennes, qui se déroule au Moyen Âge, est représentée par l'école de Kerala, période qui se termine dans les années 1500. C'est une école où des idées antérieures ont été poursuivies et développées brillamment. On ignore pourquoi cet essor des mathématiques a eu lieu au Kerala, mais il a été suggéré que cette école a influencé les mathématiques européennes, puisque des « découvertes » faites plus tard en Europe avaient en réalité été anticipées par les mathématiciens du Kerala trois siècles auparavant.

# LA GÉOMÉTRIE VÉDIQUE

Les Hindous védiques adoraient les très grands nombres, qui sous-tendaient leurs croyances religieuses. Par exemple, des nombres, tel 100 milliards, étaient invoqués pour certaines cérémonies sacrificielles. Les Hindous avaient conceptualisé clairement les puissances de 10 – plus grand était le nombre choisi, plus il devenait intéressant à étudier.

La géométrie des autels donne un aperçu de l'algèbre en vogue chez les Hindous védiques. Selon l'un des schémas religieux, l'autel devait être un trapézoïde isocèle et ses côtés devaient soit être augmentés soit diminués, en fonction de la cérémonie prévue.

Cette contrainte créait un problème pour les religieux et exigeait des solutions algébriques. Les religieux bâtisseurs disposaient de règles de construction et des questions ayant un rapport au nombre de briques nécessaires pour modifier la forme de l'autel furent soulevées. Ils devaient pouvoir décider du nombre exact de briques à utiliser, de sorte qu'il n'y ait pas d'asymétrie d'une couche de briques à l'autre; c'est cela qui les a conduits à recourir à des équations simultanées.



**MA BEAUTÉ ! PARMI  
UN GROUPE DE CYGNES,  
 $7/2$  FOIS LA RACINE  
CARRÉE DU NOMBRE TOTAL  
DE CYGNES JOUAIENT  
SUR LES BERGES... ET  
LES DEUX QUI RESTAIENT  
SE CHAMAILLAIENT  
AMOUREUSEMENT SUR  
L'EAU. COMBIEN Y  
AVAIT-IL DE CYGNES  
DANS LE GROUPE ?**

**ON AVAIT DONC  
DÉJÀ À NOTRE  
ÉPOQUE DES  
EXERCICES DE  
CALCUL MENTAL...**

Les mathématiciens hindous avaient calculé  $\pi$  correctement jusqu'au 4<sup>e</sup> chiffre après la virgule.



Les sphères, par exemple, étaient subdivisées en petites pyramides pour en occuper le mieux possible leur volume ; c'était une méthode à « l'épuisement », utilisée d'ailleurs par Archimède. De telles opérations, faisant appel à de « très petits » éléments, impliquaient des rudiments de ce qui devint plus tard le calcul intégral.

Les Hindous appliquaient cette méthode aux calculs astronomiques pour connaître la vitesse de déplacement et la position des planètes dans le ciel. Une prédiction précise du moment des éclipses, par exemple, revêtait une grande importance religieuse. Les astronomes qui les annonçaient avec précision gagnaient énormément en prestige. Certains chercheurs spécialistes de l'histoire des mathématiques indiennes considèrent ces mesures comme le véritable départ du calcul différentiel et intégral.

# BRAHMAGUPTA

L'algèbre est apparue comme une branche distincte des mathématiques à l'époque de **Brahmagupta** (c. 598), l'un des plus grands mathématiciens indiens. Il a rédigé un traité incluant une analyse des racines carrées et cubiques, les règles de 3, de 5, de 7, etc., et la pratique du troc. De son vivant, les équations ont été réparties en groupes que nous reconnâtrions aujourd'hui : les équations simples (*yavat-tavat*), les quadratiques (*varga*), les cubiques (*ghana*) et les bi-quadratiques (*varga-varga*). De nombreux savants ont commenté son œuvre et ont fait passer ses idées au travers des âges.



Comme la plupart des Hindous védiques, Brahmagupta adorait les nombres irrationnels comme  $\sqrt{2}$  et a fourni les valeurs correspondantes, jusqu'à un haut degré de précision.





# LES COMBINAISONS VÉDIQUES ET JAÏNES

Les Hindous védiques et les Jaïns aimaient jouer avec les combinaisons. Une source qui expliquerait peut-être cet intérêt se trouvait dans la métrique de leur poésie et les variations des vers védiques. Certains vers avaient six syllabes, certains étaient plus longs (par exemple 8, 9, 11 ou 12 syllabes). Le défi consistait à alterner les sons longs et les sons courts dans chaque groupe de syllabes et à révéler les combinaisons possibles – par exemple, le nombre total de parfums que l'on peut assembler à partir de douze essences, prises simultanément une à la fois, ou deux par deux, ou trois par trois.



SNIFF!  
CE MÉLANGE  
8, 11, 9, 3 EST  
UNE VÉRITABLE  
PUANTEUR

IL EN  
RÉSULTE  
CE QUE NOUS  
APPELONS LE  
**MERU-PRASTARA**  
L'ÉQUIVALENT DU  
TRIANGLE DE  
PASCAL

**Bhaskara II** (c. 1114) a utilisé correctement le zéro dans ses démonstrations arithmétiques et algébriques. Pour l'algèbre, en l'occurrence, il utilisait des signes et des lettres pour désigner les Inconnues. Il a étudié des problèmes assez complexes dans la théorie des nombres et on lui attribue la plantation des « germes du calcul intégral moderne ».

# LA POÉSIE MATHÉMATIQUE

Les idées mathématiques en Inde se transmettaient souvent oralement sous forme de vers. Les énigmes mathématiques en vers sont monnaie courante, même de nos jours. En voici une, bien connue :

Ô BELLE DEMOISELLE AUX YEUX  
PÉTILLANTS, DITES-MOI,  
PUISQUE VOUS CONNAISSEZ LA  
MÉTHODE DE L'INVERSION,  
QUEL NOMBRE, QUE MULTIPLIE 3,  
AUGMENTÉ DES  $\frac{3}{4}$  DU PRODUIT  
PUIS DIVISÉ PAR 7 ENSUITE DIMINUÉ  
DE  $\frac{1}{3}$  DU RÉSULTAT,  
MULTIPLIÉ PAR LUI-MÊME,  
MOINS 52, DONT ON RETIRE ENSUITE  
SA RACINE CARRÉE  
AVANT DE RAJOUTER 8 POUR ÊTRE  
ENFIN DIVISÉ PAR 10,  
DONNE COMME RÉSULTAT FINAL 2?

ET J'AI  
COMBIEN DE  
TEMPS POUR  
FAIRE ÇA?

MAIS  
C'EST  
DE LA  
POÉSIE.

NON,  
NON, TU VERRAS  
À LA PAGE SUIVANTE!  
SI TU CROYAIS QUE LA  
POÉSIE ÉTAIT MAUVAISE,  
ALORS QU'EST-CE QU'IL  
FAUT PENSER DES  
MATHS!

LA RÉPONSE EST 28.  
POUR OBTENIR CELA, ON  
REFAIT À L'ENVERS LES  
OPÉRATIONS DE L'ÉNIGME.  
AINSI ON COMMENCE À:  
 $\times 10, - 8, \square^2 + 52,$   
ETC.

Voici le déroulement du calcul :

$$[(2)(10 - 8)]^2 + 52 = 196.$$

$$\text{Puis } \sqrt{196} = 14.$$

Et, avec ce 14, nous posons :

$$\frac{(14)(3/2)(7)(4/7)}{3} = 28 \quad \text{C.Q.F.D.}$$

De nos jours, nous mettrions un  $x$  pour  
l'inconnue et nous écririons :

$$((\sqrt{[x \cdot 3 \cdot (7/4) (2/3)]^2 - 52} + 8)) / 3 = 2.$$

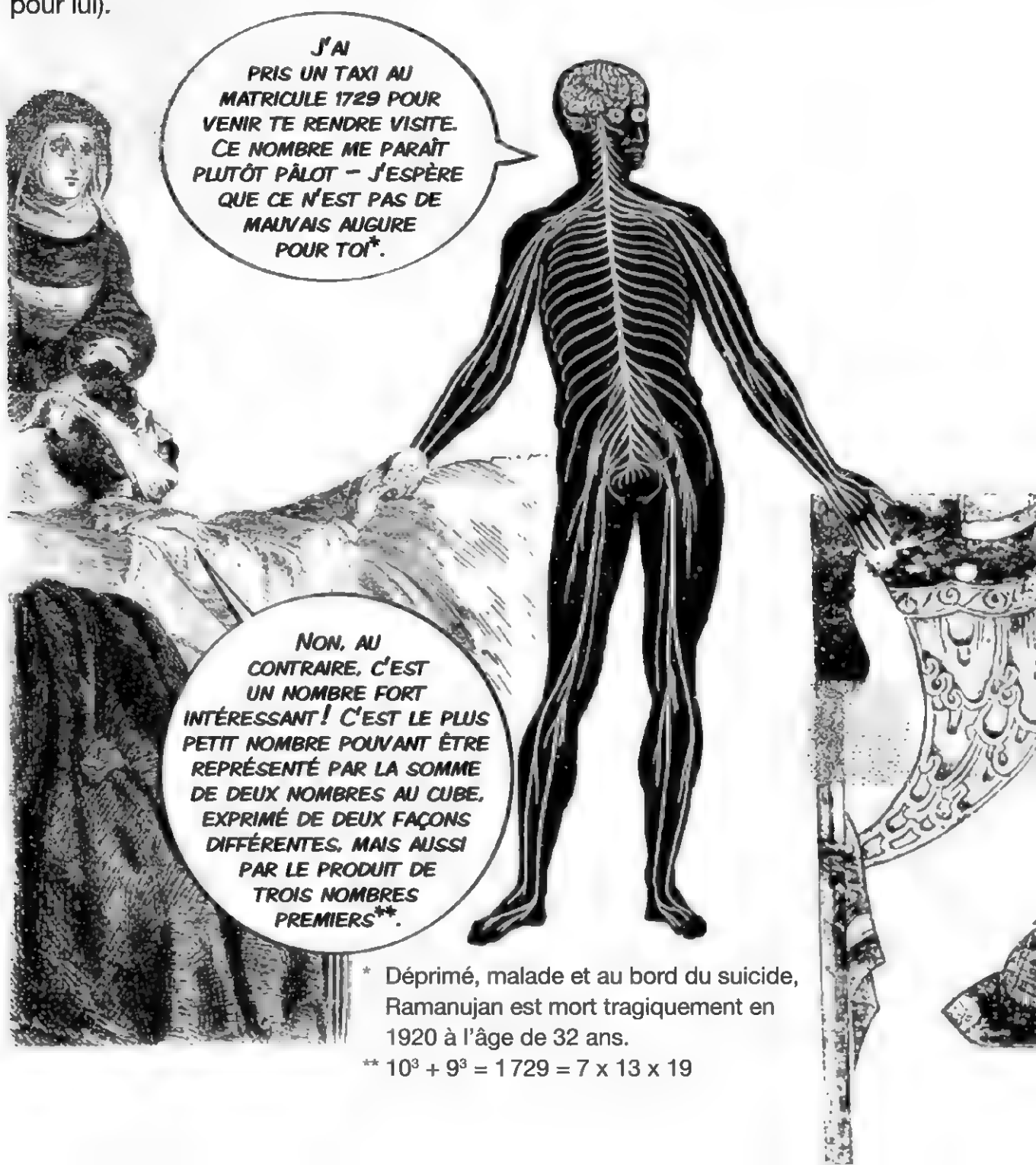
Déchiffrer cette expression alambiquée n'est  
pas si différent de la méthode ancienne  
ci-dessus, mais à présent nous devons garder  
un œil sur l' $x$  jusqu'à ce qu'il se trouve seul en  
égalité avec un nombre (soit la réponse 28).



# RAMANUJAN

L'histoire des mathématiques indiennes foisonne d'exemples de mathématiciens intuitifs. Ainsi, **Srinvasa Ramanujan** (1887–1920) n'a connu que des échecs du point de vue universitaire mais, cependant, s'est révélé être un mathématicien brillant. Humble comptable de métier mais totalement traditionnel, Ramanujan fondait ses travaux autant sur le mysticisme et la métaphysique que sur des concepts abstraits. Cela dépasse l'entendement de vouloir comprendre comment il est arrivé à ses résultats, brillants, approfondis mais parfois erronés.

Son mentor britannique, le mathématicien **G. H. Hardy** ((1877 – 1947) lui a rendu visite un jour à l'hôpital, en empruntant un taxi, N° 1729 (nombre inintéressant pour lui).



\* Déprimé, malade et au bord du suicide, Ramanujan est mort tragiquement en 1920 à l'âge de 32 ans.

\*\*  $10^3 + 9^3 = 1729 = 7 \times 13 \times 19$

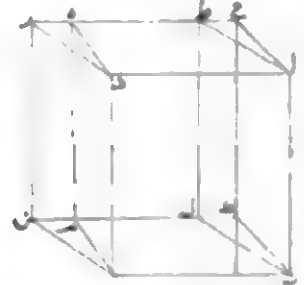
# LES MATHÉMATIQUES ARABES

Les Arabes ont « unifié » la pensée mathématique des civilisations antérieures, combinant les traditions arithmétiques et algébriques de la Babylonie, de l'Inde et de la Chine avec les traditions géométriques grecques et du monde hellénique en général. Par conséquent, les mathématiciens arabes étaient très à l'aise en maniant tant les entiers que les fractions – intervertissant des nombres à base 10 et ceux à base 6 –, l'extraction de racines carrées et les opérations avec des nombres irrationnels, l'extraction de racines cubiques, l'élaboration de coefficients binomiaux et l'extraction de racines d'ordre 4 et davantage.

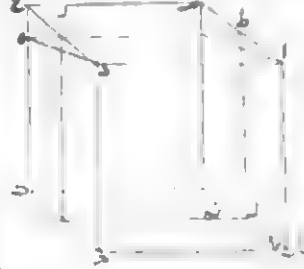


LES  
MATHÉMATIENS  
ARABES ONT À LEUR  
ACTIF DEUX GRANDES  
RÉUSSITES.

مربعی و کعبی و غیره متواریات و غیره و غیره  
طریقہ ایضا طریقیہ و غیره و غیره  
مکمل و نامکمل و غیره



سید قال ان عجیبی و درشتا و ان برهان ان تم  
ماوی صریح لا یتمایا قاعده الحقیقه حکمها و غیره  
مربع اولان و کعبی و غیره و غیره و غیره  
ما واحد و غیره و غیره و غیره و غیره



LA  
PREMIÈRE EST  
L'ÉTABLISSEMENT  
DE L'ALGÈBRE,  
QU'ILS APPELAIENT  
L'ART SCIENTIFIQUE,  
LA SECONDE EST LA  
DÉCOUVERTE DE LA  
TRIGONOMÉTRIE.



# AL-KHWARAZMI

**Muhammad bin Musa Al-Khwârizmi** (environ 780-850) était le père fondateur de l'algèbre que nous connaissons tous aujourd'hui.

Le terme même d'«algèbre» provient du mot arabe al-jabr (الرجل), «la réunion de morceaux cassés») que l'on trouve dans le titre de son ouvrage *Kitab al-mukhasar fi hisab al-jabr wa'l muqabala* (Résumé des calculs possibles par transposition et réduction). On lui doit aussi le terme «algorithme», dérivé de son nom. Al-Khwârizmi a expliqué comment n'importe quel problème peut être réduit à une formulation parmi six standardisées, au moyen de deux protocoles, le premier appelé *al-jabr* et le second *al-muqabala*.

L'*al-jabr* traitait des termes de transformation pour éliminer des quantités négatives de sorte, par exemple, que  $x = 40 - 4x$  devienne  $5x = 40$  et donc  $x = 8$ .

La procédure suivante, *al-muqabala*, avait pour but d'équilibrer les quantités positives restantes (ainsi, si nous posons  $50 + x^2 = 29 + 10x$ ).

L'*al-muqabala* réduit cette expression à  $x^2 + 21 = 10x$ .



كتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة  
ابو جعفر محمد بن موسى الخوارزمي

بسم الله الرحمن الرحيم

هذا كتاب وضعه محمد بن موسى الخوارزمي

Dans son livre, Al-Khwârizmi n'utilisait pas de symboles comme nous le ferions aujourd'hui – les symboles ont été introduits plus tard. Avec ses «mots», il exprimait les solutions à des équations quadratiques et a posé la formule standard:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

qui a pour solution:


$$x = [1/2 a] [-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}].$$

NOUS AVONS DÉJÀ VU  
CELA PAGE 45.





# LE DÉVELOPPEMENT DE L'ALGÈBRE




LES  
MATHÉMATICIENS  
MUSULMANS SE SONT  
EXPLICITEMENT DONNÉS  
COMME OBJECTIF «DE TRAITER  
DES INCONNUES AU MOYEN DE  
TOUS LES OUTILS ARITHMÉTIQUES  
EXISTANTS, TOUT COMME  
L'ARITHMÉTIICIEN  
ANALYSE LES VALEURS  
CONNUES».

«Pour nous, le but de l'algèbre  
est double : l'application  
systématique des opérations  
de l'arithmétique élémentaire  
aux expressions algébriques ;  
et l'étude d'expressions  
algébriques, indépendamment  
de ce qu'elles pouvaient  
représenter, de façon à  
pouvoir leur appliquer  
les opérations d'ordre  
général qui avaient déjà été  
appliquées aux nombres.»

**Al-Samaw'al**  
(environ 1130–1180)

Al-Samaw'al a été le  
premier à écrire ses  
résultats algébriques sous  
forme de symboles.

IL A AUSSI  
DÉMONTRÉ – ET  
C'EST ÉNORME – QU'IL  
SAVAIT TRAITER LES  
NOMBRES NÉGATIFS,  
CONSIDÉRÉS PAR LUI  
COMME DES ENTITÉS  
DISTINCTES.



DANS MON LIVRE  
AL-FAKHRI, J'AI  
ÉTUDIÉ LES DIFFÉRENTES  
« PUISSANCES DE  
L'INCONNUE ».

J'AI  
ÉGALEMENT APPLIQUÉ  
DES PROTOCOLES  
ARITHMÉTIQUES À DES  
EXPRESSIONS ALGÈBRIQUES  
ET J'AI AVANCÉ L'UNE DES  
PREMIÈRES FORMULATIONS  
POUR L'ALGÈBRE DES  
« POLYNÔMES ».

Al-Karaji  
(c. 953–1029)

Les travaux d'Al-Karaji  
ont été utilisés par  
ses successeurs pour  
proposer des règles  
pour la « divisibilité »  
des polynômes, l'un par  
l'autre et aussi des règles  
relatives à la possibilité  
ou non d'extraire la  
racine carrée d'un  
polynôme.

CES TRAVAUX  
ONT MENÉ À « L'ANALYSE  
COMBINATOIRE », APPLIQUÉE PAR LA SUITE  
AUX ANALYSES DES JEUX DU HASARD POUR  
CALCULER LES PROBABILITÉS DE L'ORDRE  
DES JETS DE DÉS OU DE MAINS  
DE CARTES.

UNE  
FORMULE POUR  
UNE « EXPANSION  
BINOMIALE » ÉTAIT  
ÉGALEMENT ÉNONCÉE  
ET DÉRIVÉE DE CES  
TRAVAUX.

SA TABLE  
DE COEFFICIENTS, C'EST-  
À-DIRE LE « TRIANGLE DE  
PASCAL » (DÉJÀ DÉCOUVERT  
PAR LES CHINOIS, COMME  
INDIQUÉ PLUS HAUT),  
ÉTAIT MISE EN  
ÉVIDENCE.

**Omar Khayyam** (1048–1131) a analysé les méthodes permettant d'extraire des racines de termes aux puissances 4, 5, 6 et même davantage; sa méthode d'approche n'impliquait pas de recours à des constructions géométriques, mais à un équivalent du triangle de Pascal. Sa « découverte » était également faite en Chine à la même époque.

J'ÉTAIS  
AUSSI UN PEU  
POÈTE À MES  
HEURES!

J'AI ÉCRIT UN  
LIVRE SUR L'ALGÈBRE  
TOUT EN VERS ET J'AI  
PROPOSÉ DES SYMBOLES  
POUR LES OPÉRATIONS  
ALGÈBRIQUES, QUI  
SONT MIEUX CONNUS  
MAINTENANT DANS  
L'OCCIDENT.

**Abu'l  
Hasan  
al-Qalasadi**  
(c. 1412–1486)

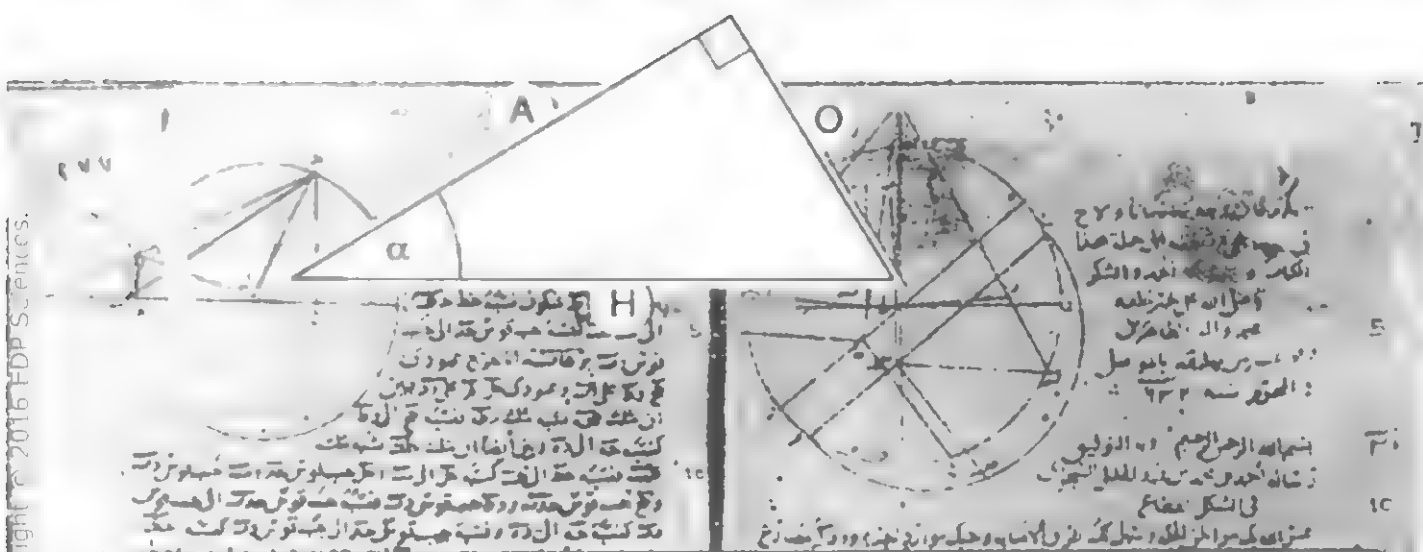
En plus de calculer la valeur de  $\pi$  jusqu'au 16<sup>e</sup> chiffre après la virgule, **Al-Kashi** (c. 1380–1429) a introduit une méthodologie pour traiter des fractions décimales.



# LA DÉCOUVERTE DE LA TRIGONOMETRIE

Ce sont des mathématiciens qui ont introduit les six rapports trigonométriques de base et leur développement pour apporter des solutions à divers problèmes géométriques. Ils ont ainsi remplacé la méthode « lourde » dite des cordes (segments inscrits dans un cercle) des Grecs – notamment l'astronome **Claude Ptolémée** (c. 100–170) – par une approche trigonométrique moderne.

On définit ces six fonctions par rapport aux côtés d'un triangle rectangle : **O** pour la droite opposée à un angle donné  $\alpha$ , **A** pour une droite adjacente à cet angle et **H** pour l'hypoténuse, c'est-à-dire la droite la plus longue du triangle. Alors, le **sinus** de l'angle est donné par le rapport **O/H**, le **cosinus** par **A/H** et la **tangente** par **O/A**. Un monde incroyable de rapports découle de ces trois définitions basiques. La trigonométrie représentait l'un des développements les plus importants dans la progression de nos mathématiques, mais aussi pour l'astronomie et les arts de mesure pratiques, comme l'arpentage, si utile aux bâtisseurs de forteresses.



On devine aisément que les trois autres fonctions simples sont les réciproques des trois premières; ainsi  $\operatorname{cosec} \alpha$  est le rapport  $H/O = 1/\sin \alpha$ ;  $\sec \alpha H/A = 1/\cos \alpha$ ; et le  $\cotan \alpha$  est le rapport  $A/O = 1/\tan \alpha$ .

# AL-BATTANI

**Al-Battani** (c. 855–923) a produit un nombre conséquent de rapports trigonométriques, parmi lesquels :

$$\tan a = \sin a / \cos a$$

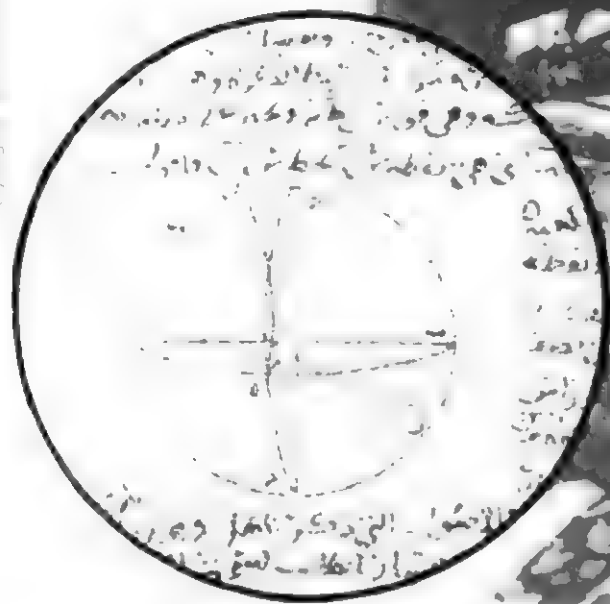
$$\sec a = \sqrt{1 + \tan^2 a}$$

Il a également résolu l'équation  $\sin x = a \cos x$

en découvrant la formule

$$\sin x = a / \sqrt{1 + a^2}$$

J'AI ÉGALEMENT  
FAIT BON USAGE  
DE LA TANGENTE OU  
«L'OMBRE», INTRODUITE  
PRÉCÉDEMMENT PAR LE  
PIONNIER **AL-MARWAZI**  
(c. 796–869), POUR  
DÉVELOPPER DES  
ÉQUATIONS DE CALCUL  
DES VALEURS DE TANGENTES  
ET DE COTANGENTES  
POUR LESQUELLES, EN  
PARTICULIER, J'AI RÉDIGÉ  
UNE TABLE DE VALEURS.





# Abu Wafa

Abu Wafa (940–998) a établi les rapports suivants :

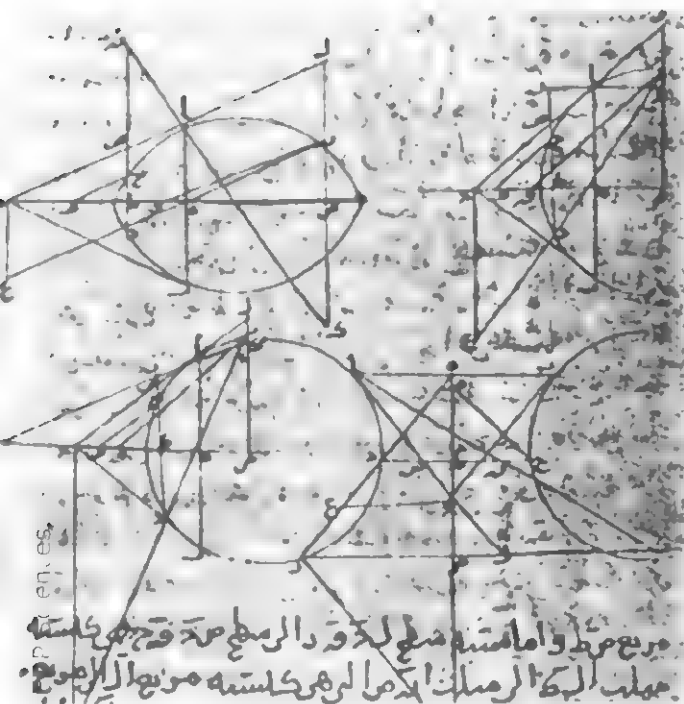
$$\sin (a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

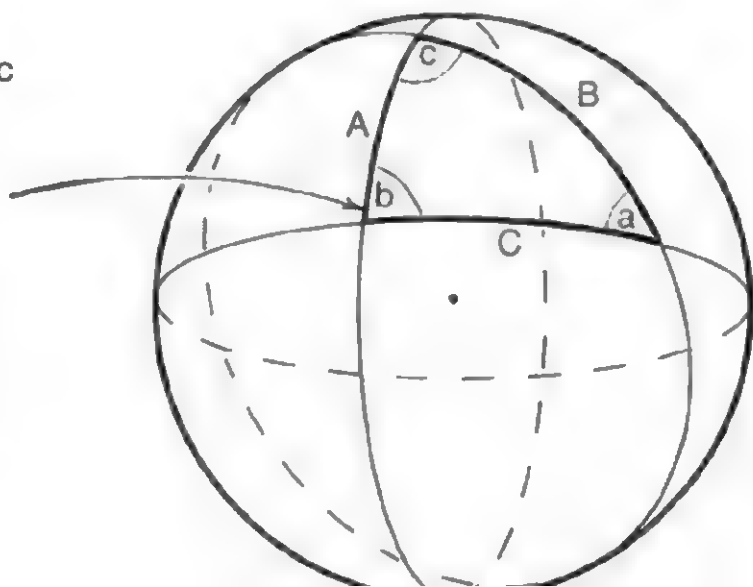
et il a découvert les formules en sinus pour les calculs en géométrie sphérique :

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$



MES  
CONSTRUCTIONS  
ÉTAIENT SI ÉMINEMMENT  
«SERVIABLES» QU'ELLES  
ONT LARGEMENT CIRULÉ  
EN EUROPE PENDANT LA  
PÉRIODE DE LA RENAISSANCE.  
J'AI REMPLI DE NOUVELLES  
TABLES TRIGONOMÉTRIQUES ET  
DÉVELOPPÉ DE NOUVELLES  
FAÇONS DE RÉSOUDRE DES  
PROBLÈMES DE TRIANGLES  
SPHÉRIQUES.

A, B et C sont les longueurs (en degrés) des « grands cercles » qui constituent un triangle à la surface d'une sphère, avec a, b et c les angles opposés. On rappelle qu'un grand cercle entoure un plan qui passe par le centre de la sphère. De nos jours, les avions long-courriers suivent de tels cercles orthodromiques, qui offrent donc le trajet le plus court entre deux points sur le globe.





# IBN YUNUS ET THABIT IBN QURRA

Ibn Yunus (950–1009) a démontré que :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos (a + b) + \cos (a - b)]$$

Bien que cette équation fasse référence à des fonctions trigonométriques, elle permet de déclinier un produit comme une somme. Au temps où les calculs de produits et de nombres avec de nombreux chiffres étaient sûrement fastidieux, cette formule simplifiait énormément le travail. Elle a d'ailleurs servi plus tard à renforcer le développement des logarithmes, qui exécutent la même fonction mais plus directement. Elle a débouché aussi sur la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique, toujours en vigueur aujourd'hui, la formule cosinus suivante :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

(où A est l'arc d'un grand cercle, a étant l'angle opposé).

**Thabit ibn Qurra** (836–901) a rédigé des textes sur la théorie des nombres et a étendu leur utilisation au traitement des rapports entre quantités géométriques – un pas que n'ont jamais franchi les Grecs.



IL A  
ÉGALEMENT  
DISCUTÉ DU  
PROBLÈME DE  
SAVOIR SI (ET  
OÙ) LES LIGNES  
PARALLÈLES  
POUVAIENT SE  
RENCONTRER.

بن المراد من الدائرة الصغيرة مدار

دائرة نصف

للمنازل

قطر الكرة

سيرة غير

مفتركة بالافروضه

القطر الى وضعه بقدر ما يزملة

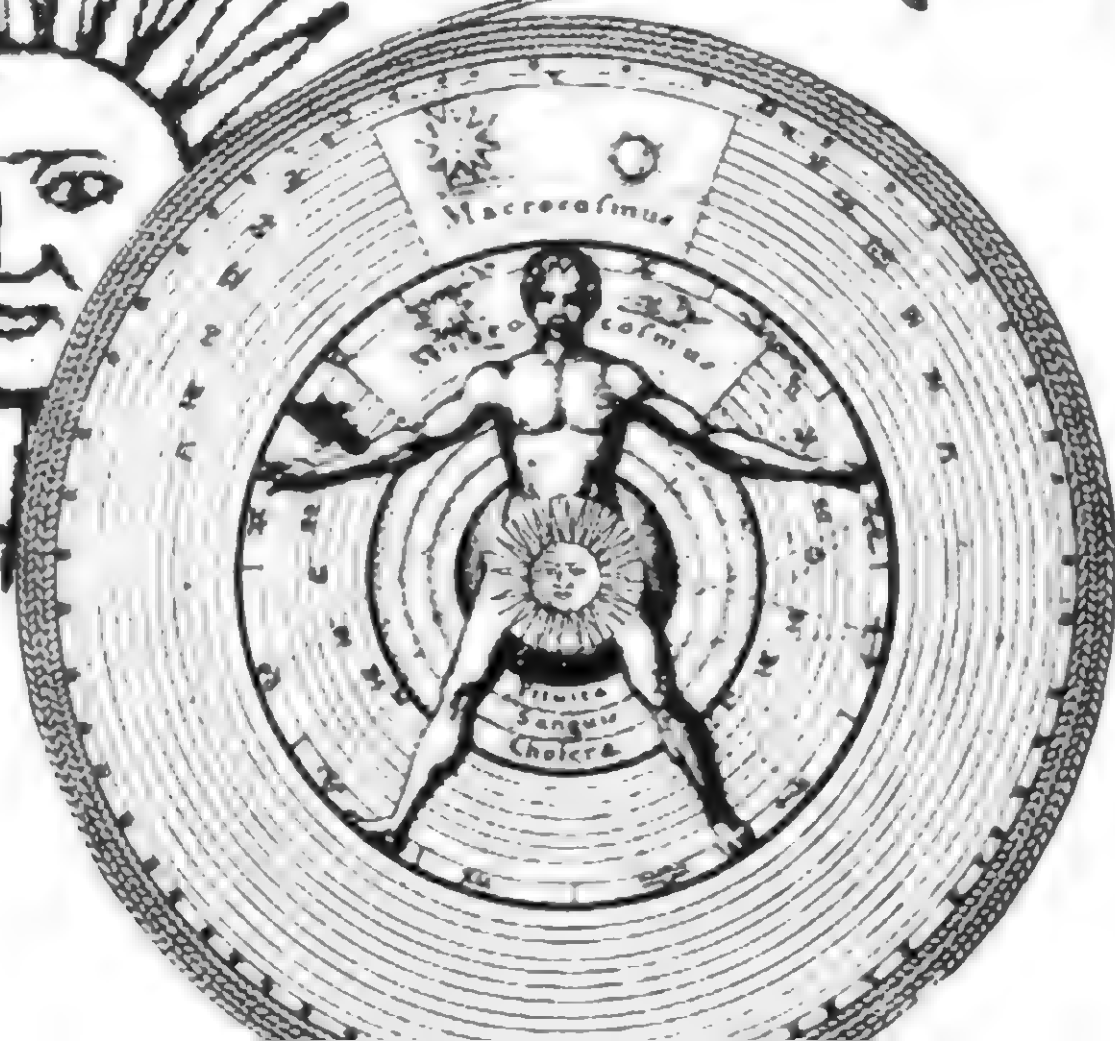
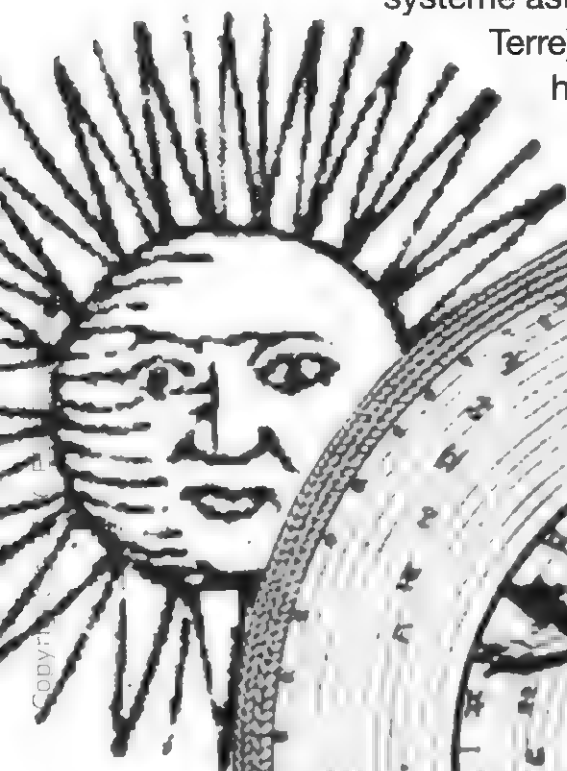
ان الكواكب تتحرك في الدوائر

## AT-TUSI

Le plus éminent des universitaires dans le champ de la trigonométrie, plane et sphérique, était **Nasir ad-Din at-Tusi** (1201–1274).

Son traitement global de la résolution des triangles sphériques est une étude qui fait date dans le développement des mathématiques. Il a élaboré une formule connue comme le « couple Tusi » qui démontrait comment un mouvement de va-et-vient peut être représenté par la combinaison de deux mouvements circulaires.

Ce dispositif a permis à **Nicolas Copernic** (1473–1543) de représenter tous les déplacements irréguliers de planètes comme des mouvements circulaires combinés, et c'est ce qui lui a permis d'imaginer un système astronomique avec le Soleil (et non la Terre) en son centre (système héliocentrique).



# SOLUTIONS DE PROBLÈMES IMPLIQUANT DES NOMBRES ENTIERS

Pendant plusieurs siècles, les problèmes faisant appel à des entiers étaient très populaires. Après tout, les gens comprennent bien les nombres. Un exemple est le problème dit de l'héritage :



Une approche plus rigoureuse était démontrée pour la première fois par **Diophante d'Alexandrie** (c. III<sup>e</sup> siècle). Les mathématiciens musulmans étaient actifs dans le développement théorique de ce travail. Un point de départ naturel était constitué des « nombres pythagoriciens » (comme 3, 4 et 5) qui forment des triangles rectangles. Puis l'équation a été généralisée et au x<sup>e</sup> siècle, les mathématiciens musulmans ont posé la question : l'équation  $x^n + y^n = z^n$  peut-elle avoir une solution en nombres entiers ? Tout comme Fermat plusieurs siècles après (son nom a été donné à ce problème), plusieurs mathématiciens pensaient avoir la preuve de son impossibilité. Leurs successeurs ont découvert leur erreur et nous savons qu'il s'agit d'une démonstration des plus difficiles !

# L'ÉMERGENCE DES MATHÉMATIQUES EUROPÉENNES

Les mathématiques en Europe ont profité des contributions de toutes les civilisations antérieures et contemporaines. Pendant toute la période du Moyen Âge, l'Europe était significativement inférieure aux civilisations de l'Orient, en termes de technologies, de sciences et de culture.

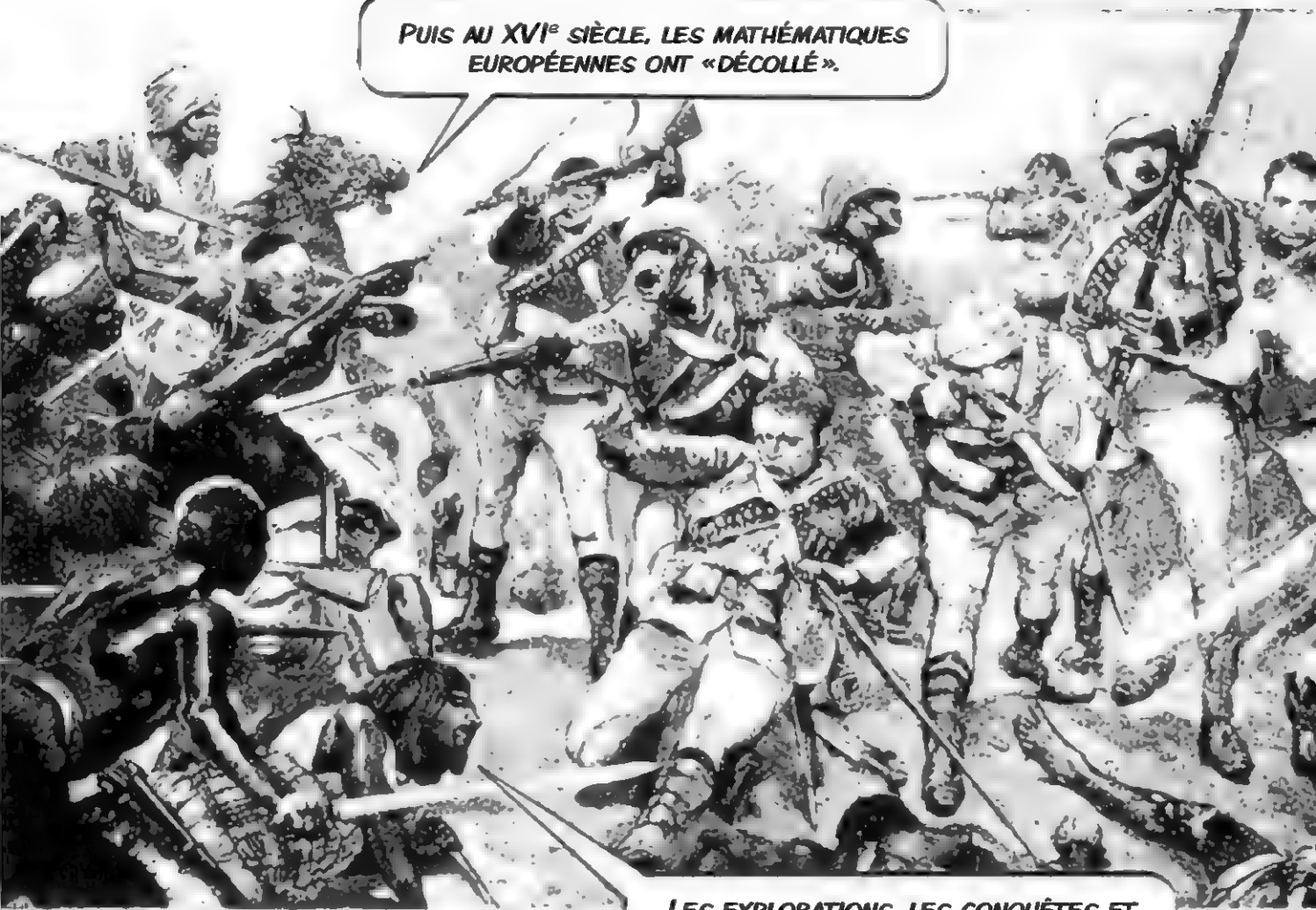
Elle a rattrapé petit à petit son retard, d'abord au travers de contacts culturels au moment des croisades, puis par des dialogues avec des savants d'Espagne et d'Italie.

Les textes en langue arabe (soit les originaux soit déjà des traductions en grec) pouvaient être traduits par des équipes de linguistes, parfois avec des Juifs comme intermédiaires.

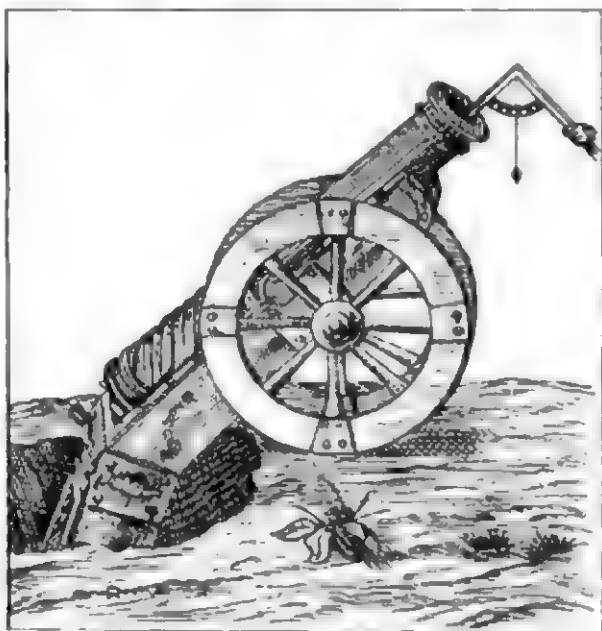


Les termes scientifiques qui ont le préfixe «al» comme alcool ou algèbre nous rappellent ces liens culturels. Pendant la Renaissance au  $xv^e$  siècle, on a redécouvert la tradition des mathématiques, esthétiques, mystiques et ésotériques.

PUIS AU XVI<sup>e</sup> SIÈCLE, LES MATHÉMATIQUES  
EUROPÉENNES ONT « DÉCOLLÉ ».



LES EXPLORATIONS, LES CONQUÊTES ET  
LES GUERRES DE RELIGION ÉTAIENT LES  
GRANDES THÉMATIQUES DE CETTE ÉPOQUE.



On avait besoin de mathématiques pour naviguer au long cours et on s'en servait pour des constructions de défense (forts et fortifications) et pour mener des attaques (artillerie et abaques de tir). Des disciplines comme la trigonométrie étaient vitales pour s'assurer un plein succès dans pareils cas de figure. La pratique permettait d'améliorer les abaques de tir, mais augmentait aussi le niveau de connaissances théoriques.

Il y avait en parallèle, pour ainsi dire, un développement constant du commerce, ce qui demandait des méthodes améliorées pour tenir les comptes. Plus tôt, l'Église avait condamné les chiffres arabes et la comptabilité à double entrée, qui semblait plus relever d'un art magique pour ne pas dire de passe-passe (parfois c'était bien le cas!). Mais à présent, cette comptabilité-là est trop répandue pour être ignorée.



Des progrès dans les mathématiques théoriques en Europe s'accompagnaient de crises et de paradoxes. Les nombres négatifs ou irrationnels qui ne gênaient pas beaucoup les Chinois, les Indiens ou les mathématiciens arabes, sont devenus extrêmement problématiques pour les Européens, même quand ils s'en servaient avec dextérité et succès. À la fin, les paradoxes ont donné naissance à de nouveaux champs des mathématiques...



... QUI AU  
XX<sup>e</sup> SIÈCLE  
SONT DEVENUS  
EUX-MÊMES DES  
PARADOXES.



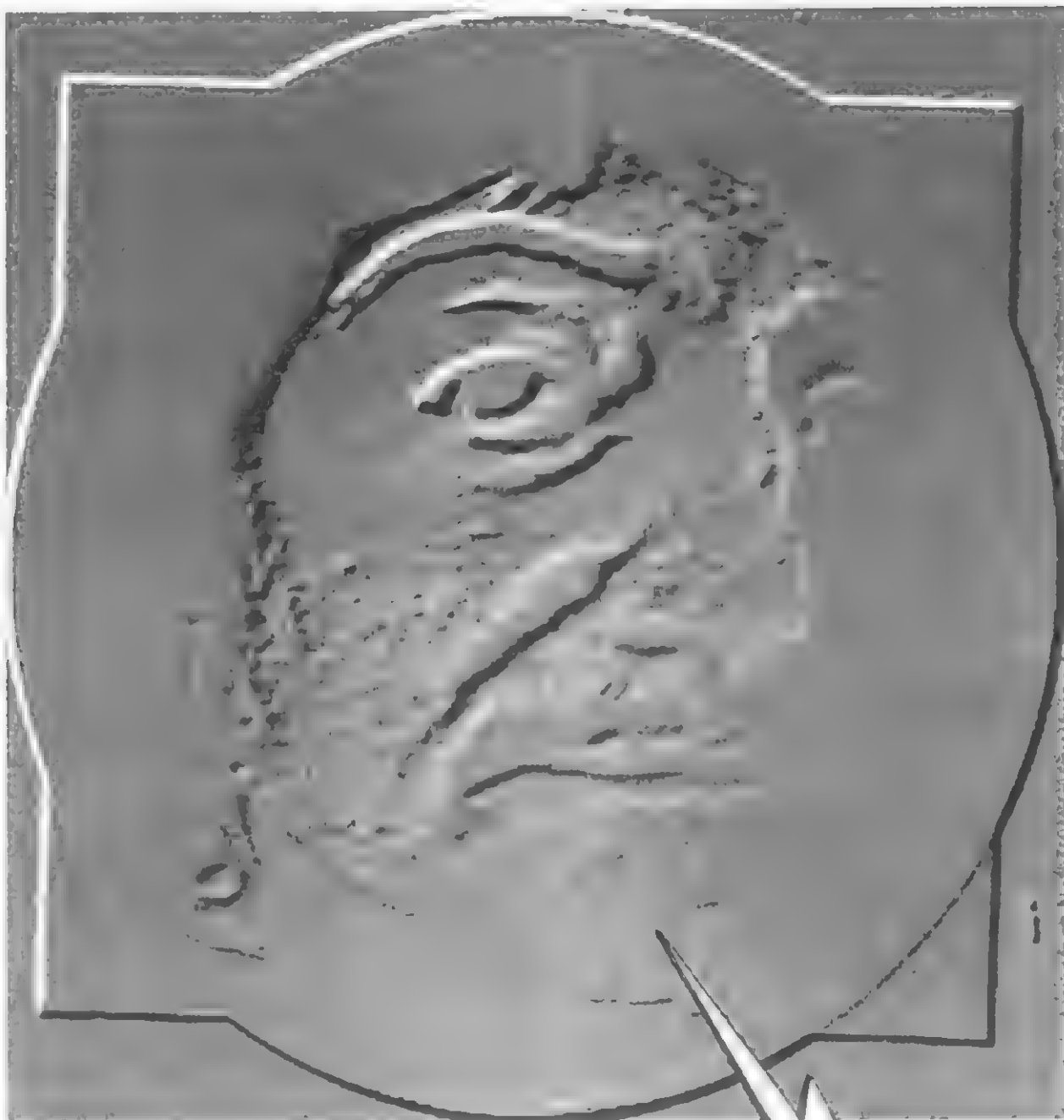
# RENÉ DESCARTES

Il est notable que le plus grand «innovateur» européen en mathématiques, le Français **René Descartes** (1596–1650), était aussi philosophe. Dans sa quête de certitude, il s'est détourné de son apprentissage du fonds littéraire humaniste pour se consacrer aux mathématiques. Mais au commencement, ce fut pour lui une déception.



Pourquoi Descartes se réfère-t-il à l'algèbre en termes aussi mesquins alors qu'il s'apprêtait à l'améliorer? Une raison en est que l'algèbre n'a été que partiellement formalisée au <sup>xvi</sup><sup>e</sup> siècle. Quelques-uns de ses termes avaient reçu des dénominations abrégées, qui n'étaient ni des expressions claires ni des symboles manipulables. Mais pour les mathématiciens de son époque, en réalité, il y avait des difficultés plus grandes encore. Ils se trouvaient en train de décrire des objets dénués de sens, ou pire!

Nous avons déjà mentionné les « nombres imaginaires », les racines d'équations algébriques comme  $x^2 + 1 = 0$ . Mais de quelle sorte de nombre peut-il s'agir ? Nous ne pouvons pas nous en servir pour énumérer des objets. Quelles sont ces catégories d'objets physiques dont la valeur de leur mesure, au carré, est négative ? On a beau pouvoir les « manipuler » avec des règles, il n'empêche que, même en prenant des précautions, on peut finir par écrire des absurdités.



ET BIENTÔT,  
D'AUTRES PARADOXES  
ALLAIENT FAIRE  
LEUR APPARITION !

# LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

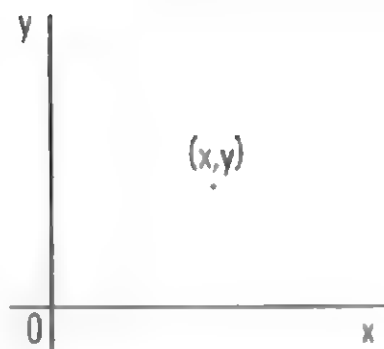
Les efforts de Descartes ont débouché sur la géométrie « analytique » ou « des coordonnées ».

La géométrie analytique est basée sur l'idée qu'un point dans l'espace...

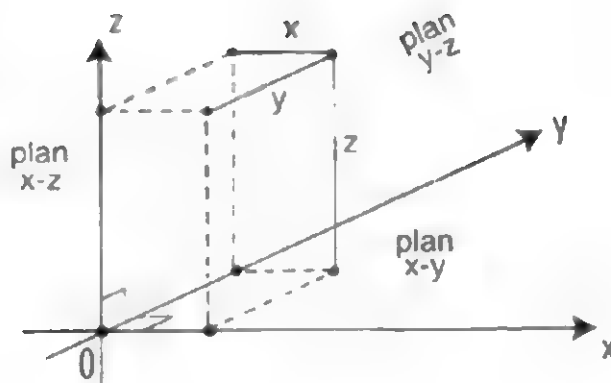


... PEUT  
ÊTRE DÉFINI PAR  
RAPPORT À UN AUTRE  
POINT AU MOYEN D'UN  
ENSEMBLE DE  
NOMBRES.

Dans la géométrie plane, il y a deux axes à angle droit l'un par rapport à l'autre que nous appelons communément l'axe  $x$  (abscisses) et l'axe  $y$  (ordonnées). La position d'un point quelconque dans le plan est donnée par les coordonnées  $(x, y)$  qui indiquent la distance, dans le sens  $x$  et dans le sens  $y$ , à partir de l'origine – c'est-à-dire du point de l'intersection des deux axes.



Dans une figure à trois dimensions, nous plaçons trois axes chacun à angle droit par rapport aux deux autres : les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  (abscisse, ordonnée et cote).



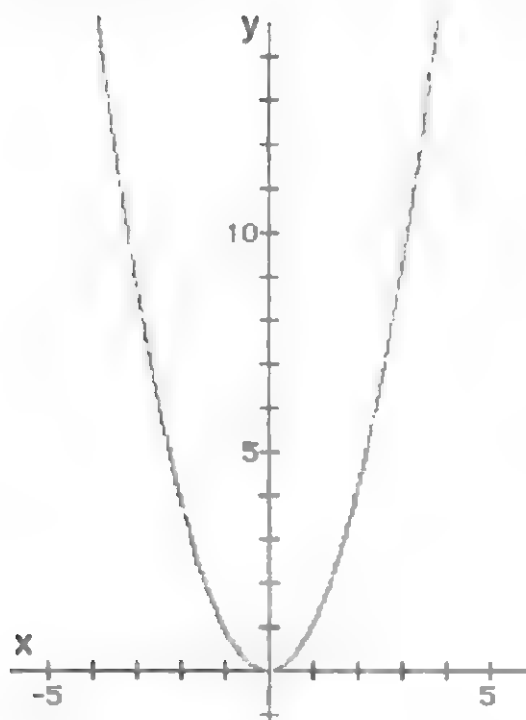


EN NOUS RÉFÉRANT AUX AXES X ET Y, NOUS POUVONS INSCRIRE UN GRAPHIQUE, POINT APRÈS POINT, SUR LE PLAN.



DE PLUS, NOUS POUVONS ÉTABLIR UNE RELATION ENTRE LES COORDONNÉES DE CHAQUE POINT, AU MOYEN D'ÉQUATIONS.

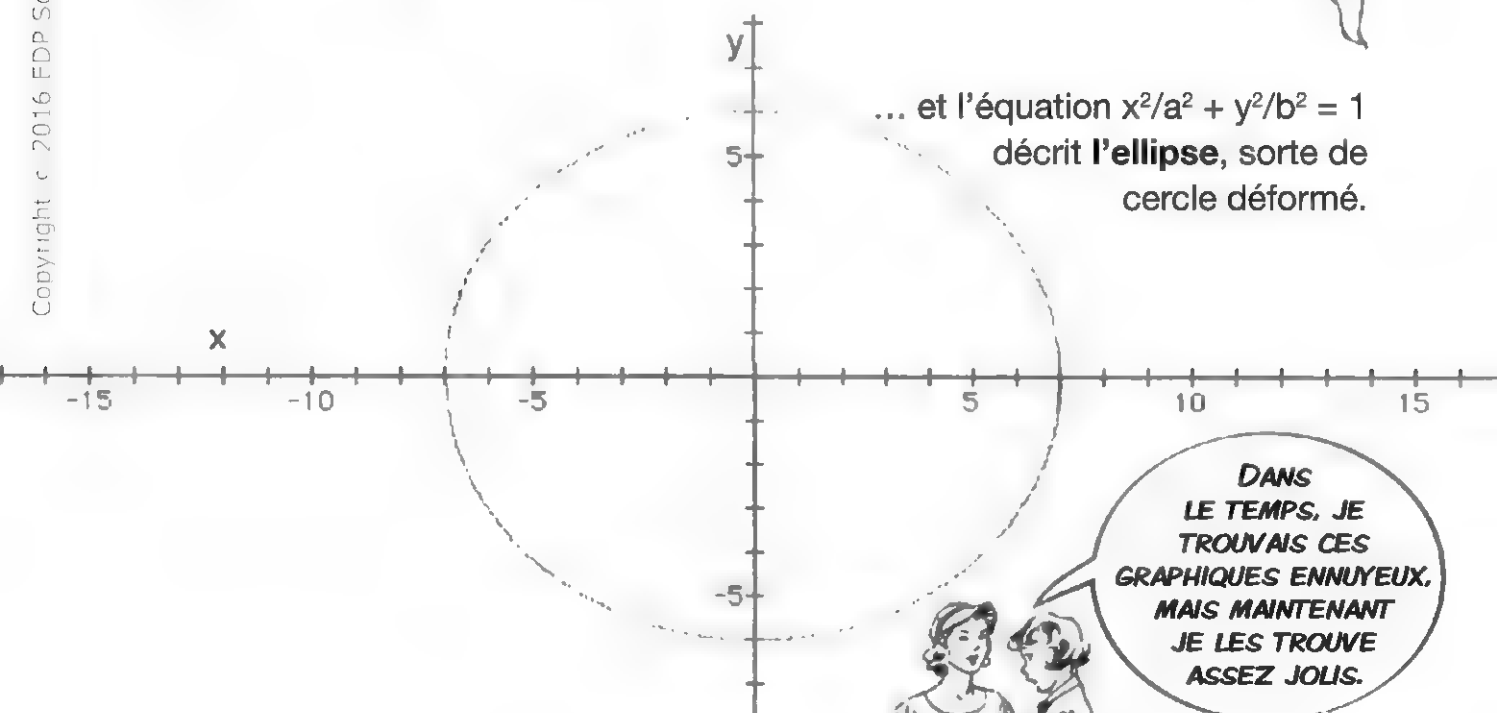
La forme la plus simple de graphique est la droite, ce qui équivaut à une équation linéaire de type  $y = ax + b$  où  $a$  et  $b$  sont des constantes.



L'équation  $y = x^2$  décrit une **parabole**...



... QUI MONTE, QUI MONTE...



... et l'équation  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  décrit l'**ellipse**, sorte de cercle déformé.



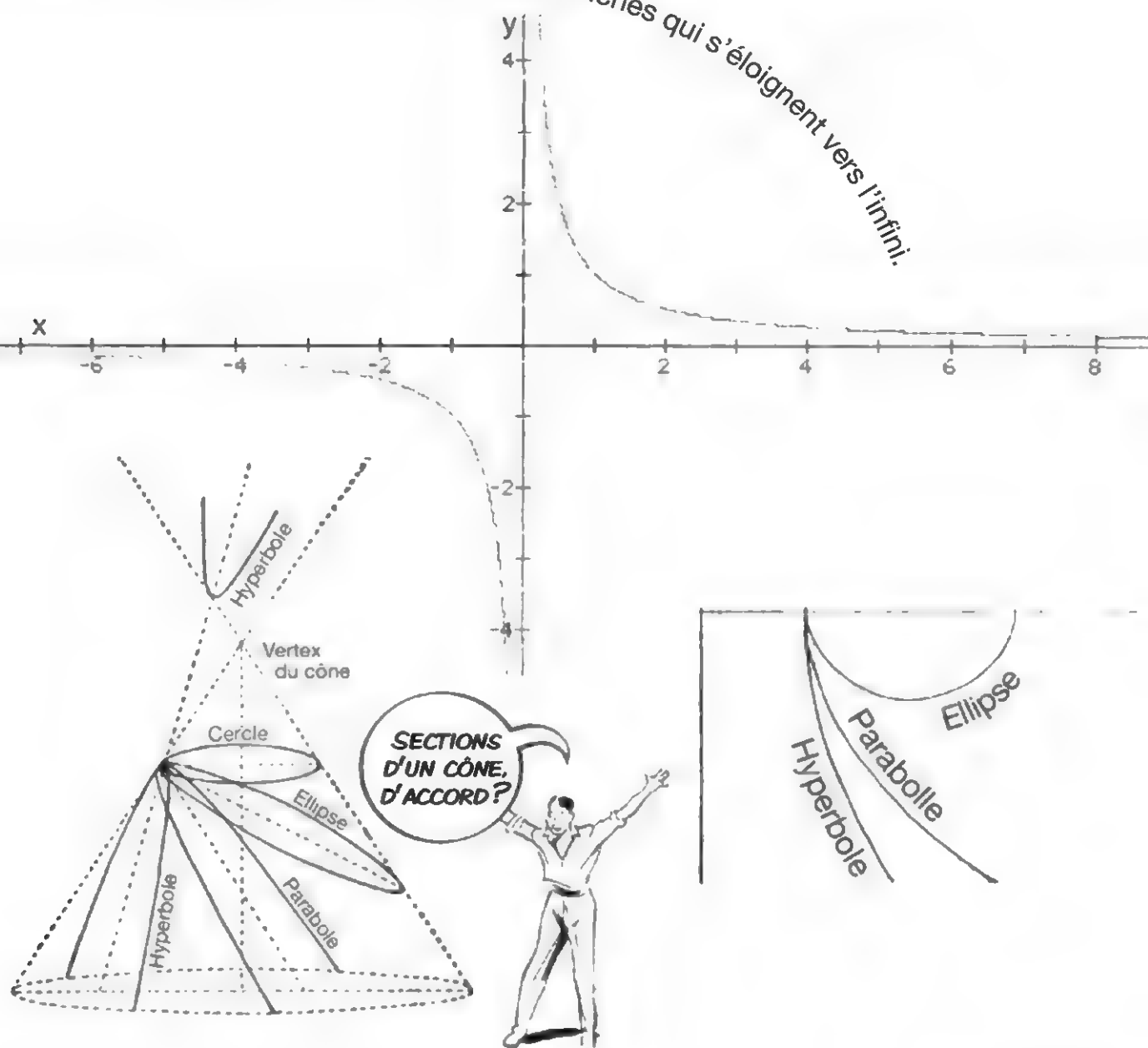
DANS LE TEMPS, JE TROUVAIS CES GRAPHIQUES ENNUYEUX, MAIS MAINTENANT JE LES TROUVE ASSEZ JOLIS.

Cette troisième courbe de la famille...

... APPELÉE «SECTION CONIQUE» ...

... est l'hyperbole,

qui a pour formule :  $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ . C'est le signe moins qui fait toute la différence, puisque le graphique a deux branches qui s'éloignent vers l'infini.



# LES FONCTIONS

Le terme «**fonction**» désigne un rapport ou une dépendance d'un terme variable par rapport à un autre (ou d'autres). Nous disons, par exemple, que  $y$  est une fonction de  $x$ , ou que  $z$  est une fonction de  $x$  et de  $y$ . (Suivant les préconisations de Descartes, nous employons les lettres vers la fin de l'alphabet pour les variables et celles du début, comme  $a, b, c$ , pour les constantes.)

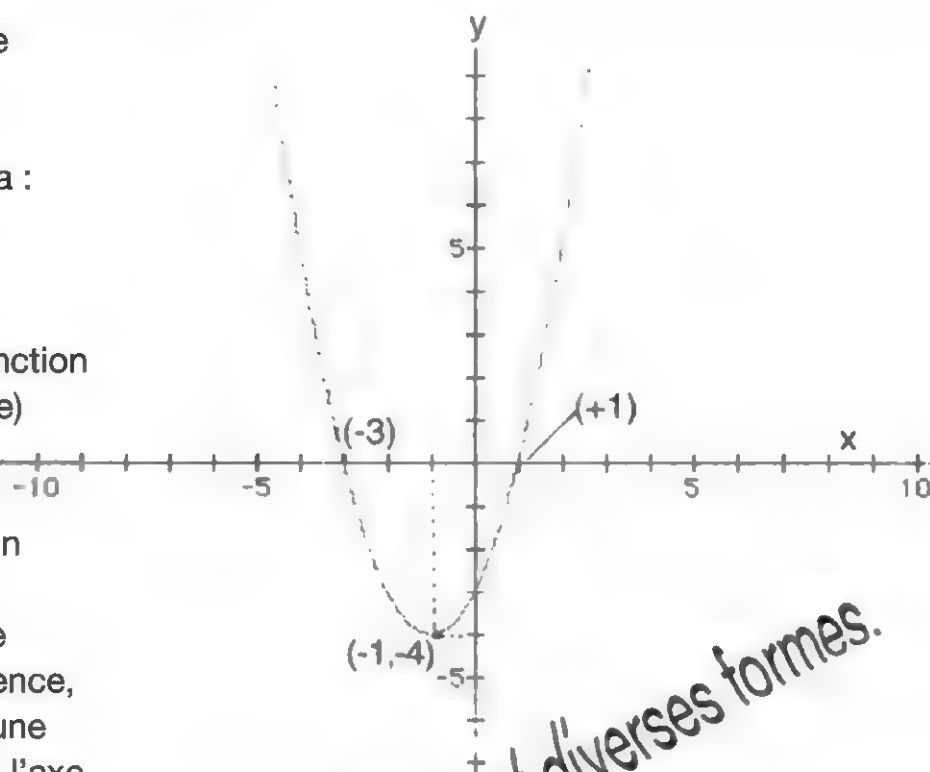
POUR LA  
GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE  
ET POUR LE CALCUL  
INTÉGRAL, NOUS UTILISONS  
DES FONCTIONS DÉCRITES  
PAR DES ENSEMBLES  
DE SYMBOLES  
CHOISIS.



Ainsi, si la consigne de construction se lit : «vous élevez le nombre au carré, ajoutez son double puis retirez 3», alors la fonction s'écrira :

$$f(x) = x^2 + 2x - 3.$$

Dans une géométrie analytique, une telle fonction (avec une seule variable) peut être schématisée en inscrivant les valeurs de  $x$  le long d'un axe et les valeurs de la fonction de  $x$  le long de l'autre axe. En l'occurrence, la fonction représente une parabole qui intercepte l'axe  $x$  aux points  $x = -3$  et  $x = +1$  et le point le plus bas se trouve à  $x = -1$  et  $y = -4$ .

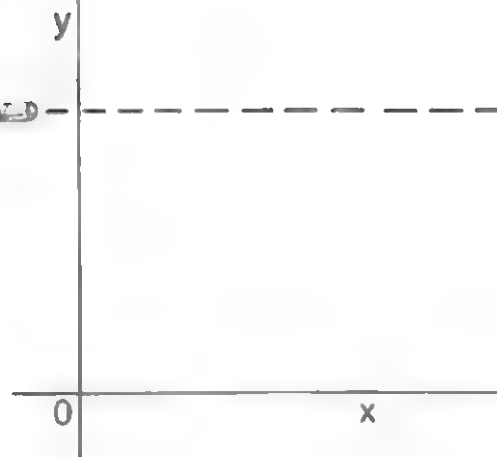


Les fonctions ont diverses formes.



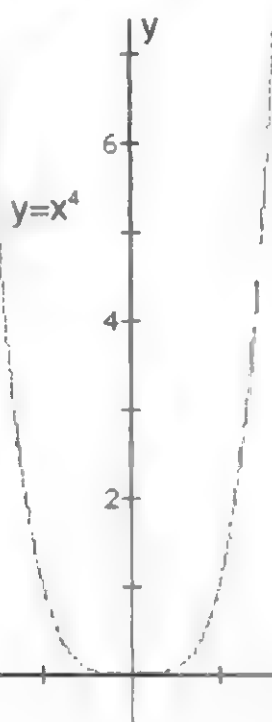
LES FONCTIONS  
«CONSTANTES»  
SONT LES PLUS  
SIMPLES.

Elles ont la forme  $f(x) = a$ .  
Cela signifie que quelle que soit  
la valeur de  $x$ , la fonction aura  
toujours la valeur constante  $a$ .

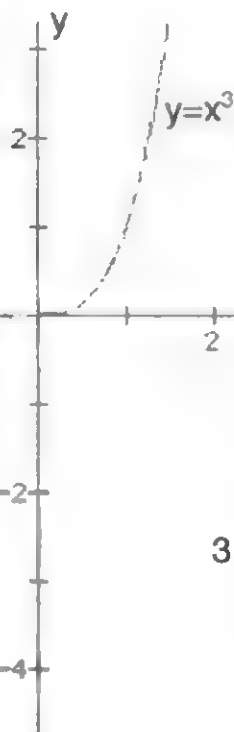


LES  
FONCTIONS DE  
PUISSANCE  
ONT LA FORME  
 $f(x) = x^N$  OÙ  $N$   
EST ARBITRAIRE  
MAIS FIXE.

La  
fonction  
 $f(x) = x^2$  est  
un exemple  
de fonction de  
puissance.

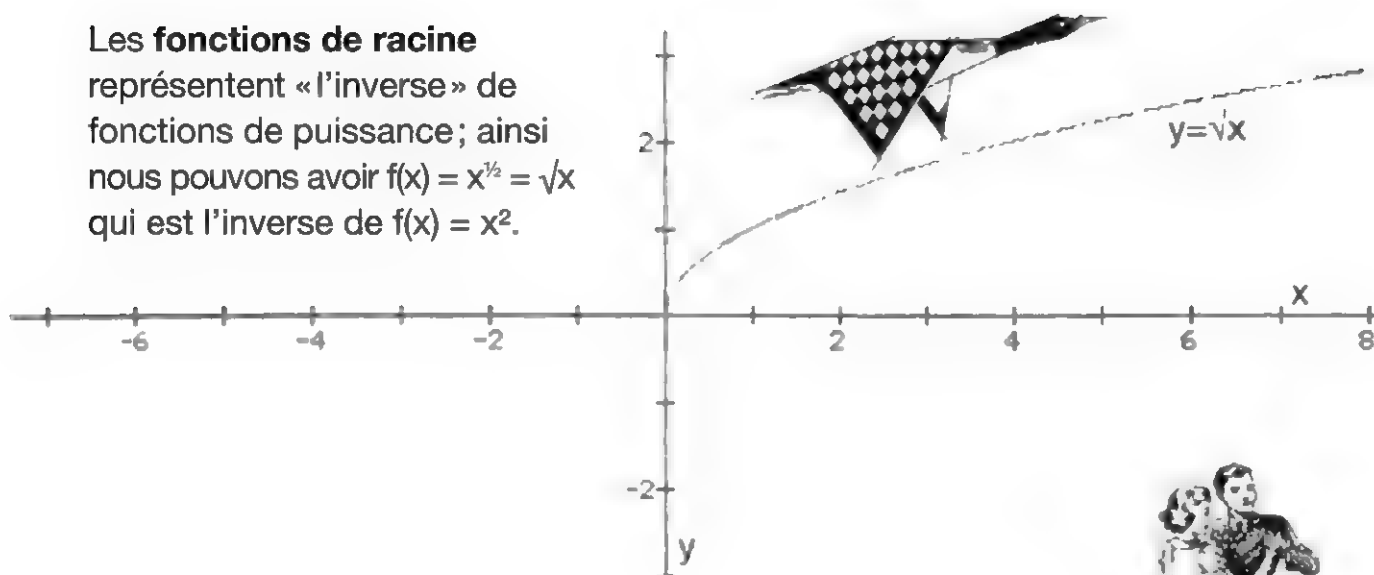


Quand la  
puissance est  
**paire**, 2, 4, ..., 2N,  
la fonction est  
dite **symétrique**  
(N peut prendre  
n'importe  
quelle valeur).



Quand la puissance est  
**impaire**, par exemple  
3, 5, ..., 2N + 1, la fonction  
est dite **antisymétrique**.

Les **fonctions de racine** représentent « l'inverse » de fonctions de puissance; ainsi nous pouvons avoir  $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$  qui est l'inverse de  $f(x) = x^2$ .



Les **fonctions polynomiales** ont des constantes  $a, b, c, d$ , etc., et une variable  $x$  qui peut être élevée à diverses puissances. Une fonction polynomiale a la forme :  

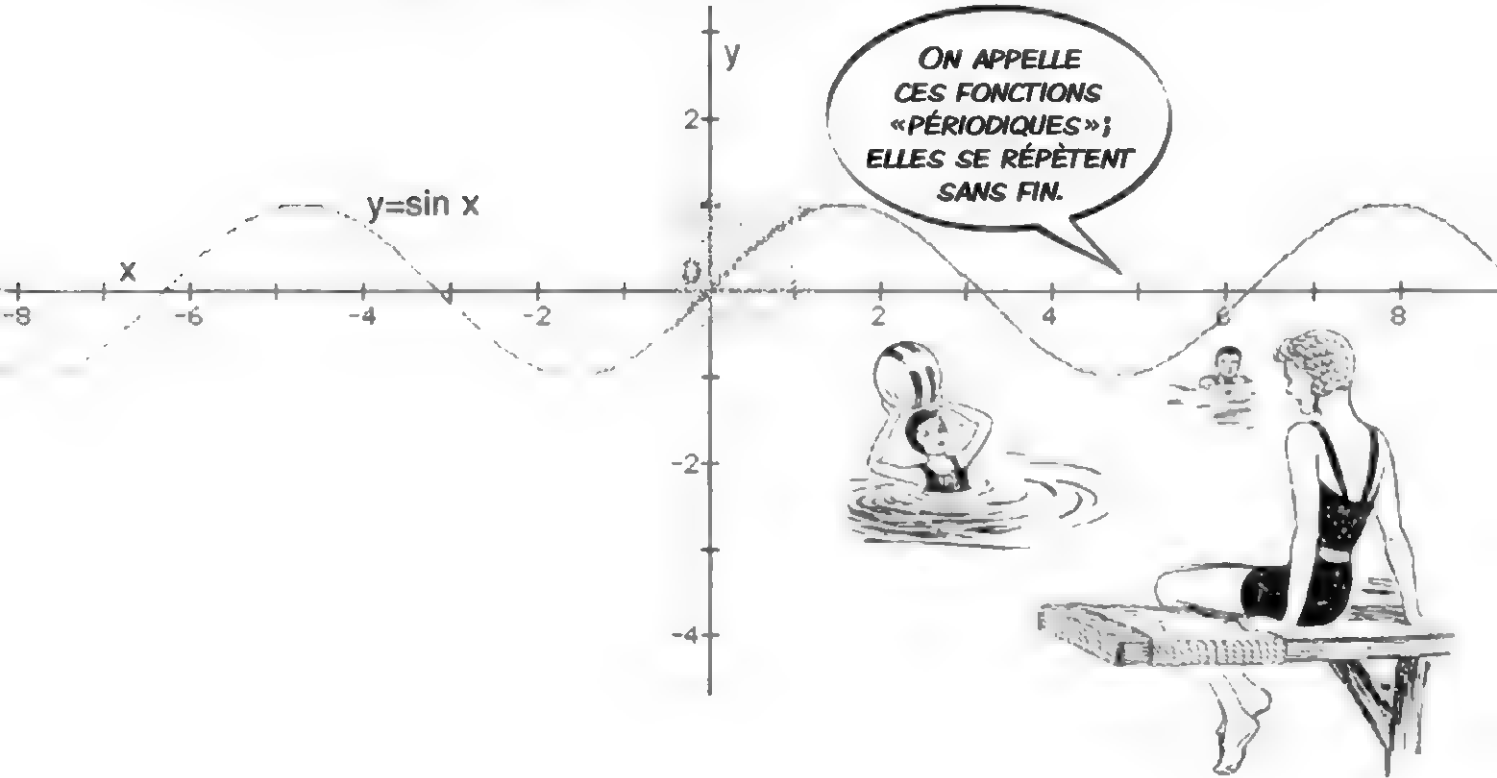
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$



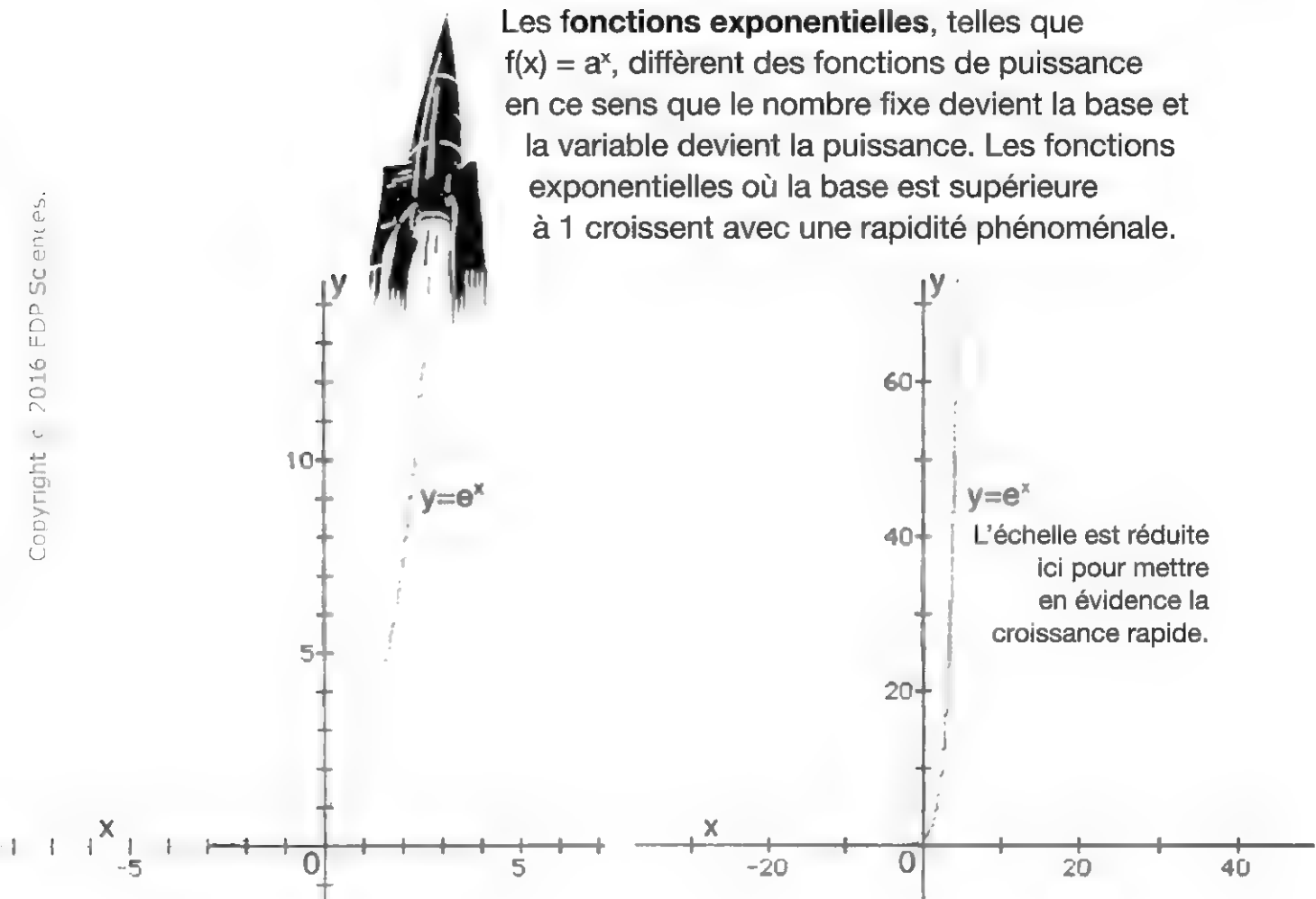
PLUS  
LOIN, NOUS  
ENTRONS DANS LA  
CONTRÉE DES FONCTIONS  
«TRANSCENDANTES»  
...

... QUI  
TRANSCENDENT  
LE ROYAUME DES  
OPÉRATIONS  
ALGÈBRIQUES.

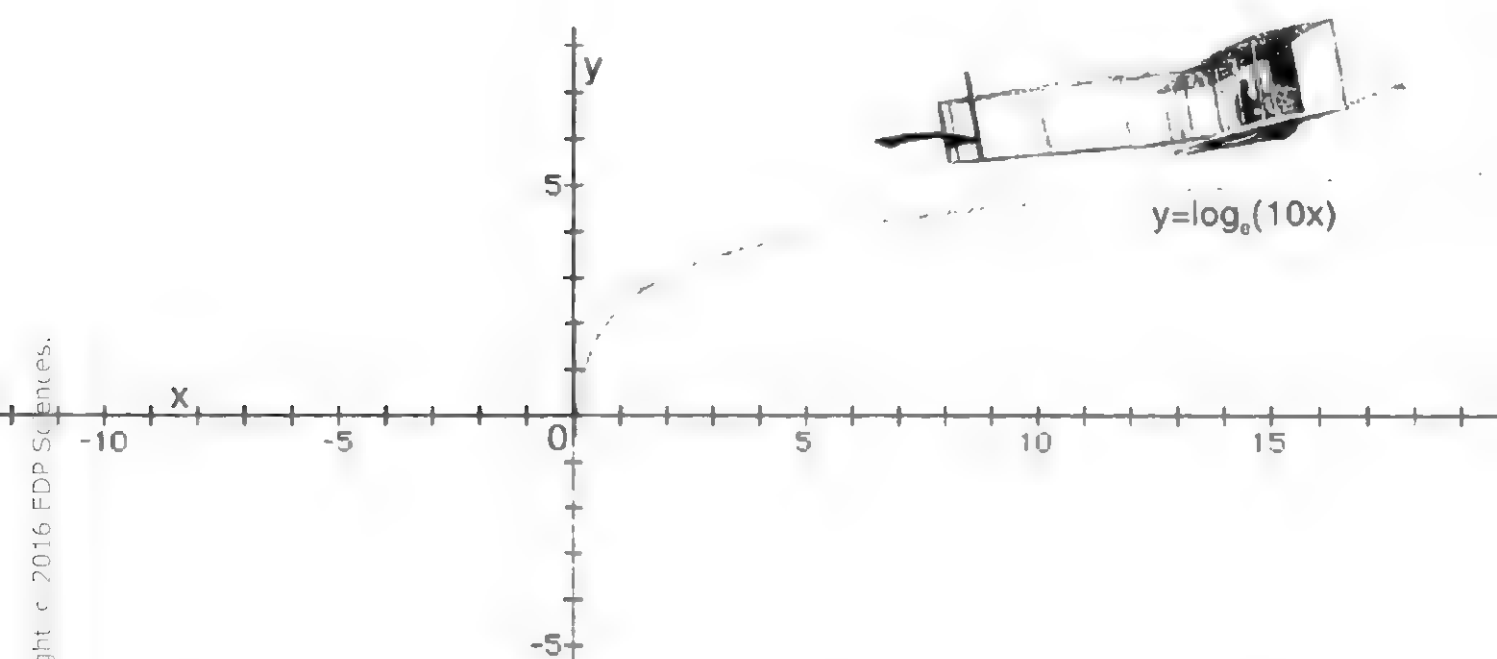
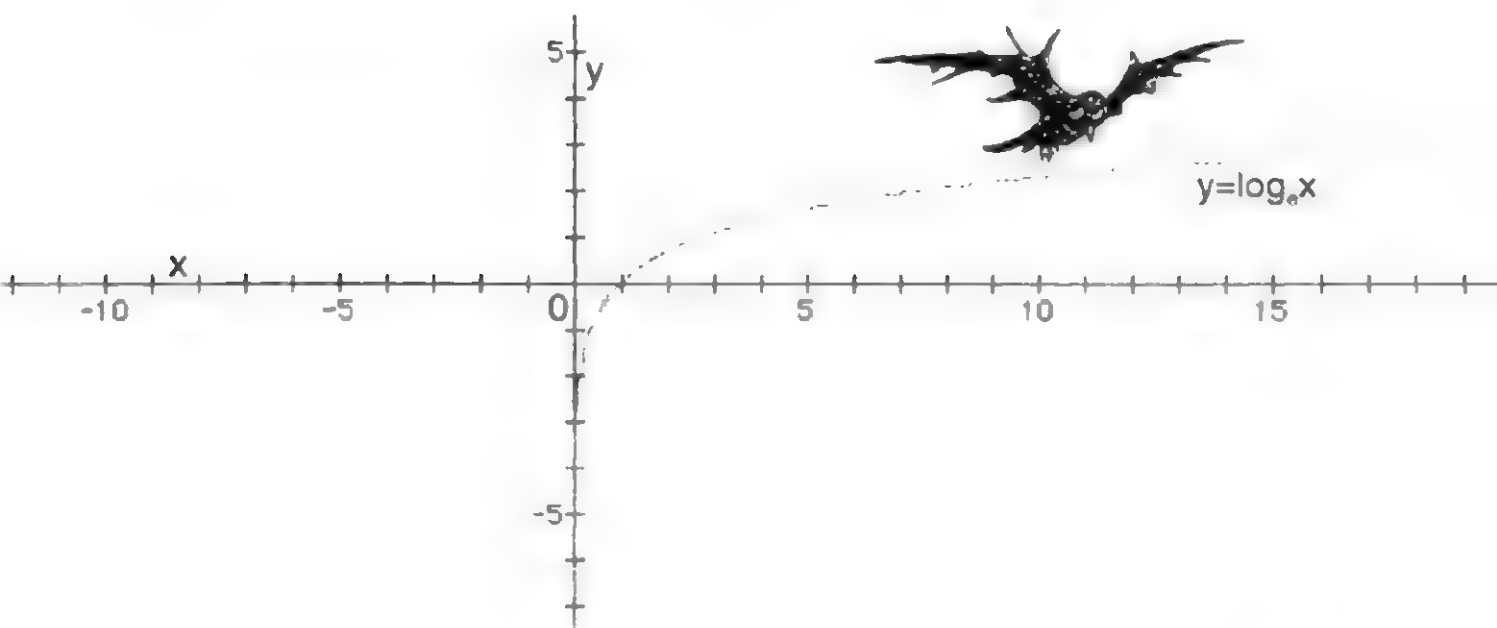
Les **fonctions trigonométriques** utilisent des rapports trigonométriques, tels que les sinus et les cosinus. Exemple :  $f(x) = \sin x$ .



Les **fonctions exponentielles**, telles que  $f(x) = a^x$ , diffèrent des fonctions de puissance en ce sens que le nombre fixe devient la base et la variable devient la puissance. Les fonctions exponentielles où la base est supérieure à 1 croissent avec une rapidité phénoménale.



Les **fonctions logarithmiques** sont les inverses des fonctions exponentielles. On écrit  $f(x) = \log_a(x)$ ; le nombre  $a$  est la **base** du logarithme. Ces fonctions croissent très lentement, par exemple :  $\log_a(10x) = \log_a(x) + \log_a(10)$



Les logarithmes que nous utilisons étaient construits sur la base 10. Dans nos ordinateurs, on passe par l'arithmétique binaire (0 et 1), avec la base 2. Cependant, pour mener à bien des exercices en mathématiques théoriques, rien ne vaut la base  $e = 2,718\ 28\dots$

C'est la « mère de toutes les bases » et elle représente la fonction exponentielle  $f(x) = e^x$ , où la vitesse de croissance est exactement égale à la taille atteinte.

LES  
FONCTIONS  
CONSTITUENT LES  
PRINCIPAUX OUTILS  
DE CALCUL  
INTÉGRAL



# LE CALCUL DIFFÉRENTIEL/ INTÉGRAL



Les travaux de Descartes ont parachevé le processus de libération de l'algèbre des mots, un peu comme la géométrie des Grecs a libéré les constructions des nombres. Une fois que Descartes eut fourni le formalisme nécessaire pour écrire des relations algébriques, les progrès ont été rapides. En moins de 40 ans après la publication de l'ouvrage de Descartes sur la géométrie algébrique, le mathématicien et philosophe allemand **Gottfried Wilhelm von Leibniz** (1646–1716) a créé une « algèbre de l'infini ». Ce que le monde anglo-saxon appelle « calculus » (en France calcul différentiel/intégral) s'est révélé être un puissant outil pour analyser des phénomènes de croissance et/ou de changement.

La position du corps  
en mouvement :  $x$   
La vitesse de déplacement :  $\dot{x}$

Newton



La fonction :  $f(x)$   
La courbe  $y = f(x)$   
La pente de la tangente :  
la dérivée  $f'(x) = dy/dx$ .  
L'aire sous la courbe,  
entre les points  $a$  et  $b$ ,  
est l'intégrale.

$$\int_a^b f(x) dx$$

Leibniz

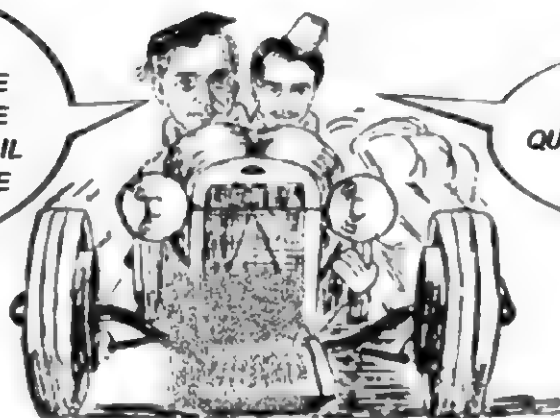
**Sir Isaac Newton** (1642–1727) avait fait une découverte équivalente un peu plus tôt, mais il avait simplement étendu la notation de Descartes plutôt que de la dépasser. C'est donc la forme leibnizienne du calcul qui prédomine aujourd'hui. Ainsi, nous voyons que deux philosophes, Descartes et Leibniz, ont créé les notations et les idées qui ont façonné les mathématiques depuis le début du XVIII<sup>e</sup> siècle.



LE SECRET DU CALCUL  
INTÉGRAL EST QU'IL UNIFIE  
DEUX TYPES DE PROBLÈME QUI,  
JUSQUE-LÀ, SEMBLAIENT NON LIÉS.  
NOUS LES APPELONS CALCUL  
DIFFÉRENTIEL ET CALCUL DES  
INTÉGRALES.

# LE CALCUL DIFFÉRENTIEL

LE «CALCULUS»  
ANGLO-SAXON PEUT  
ÊTRE CONSIDÉRÉ COMME UNE  
EXTENSION DE LA GÉOMÉTRIE  
ANALYTIQUE; AVEC LAQUELLE IL  
PARTAGE UNE GRANDE PARTIE  
DE SA TERMINOLOGIE.

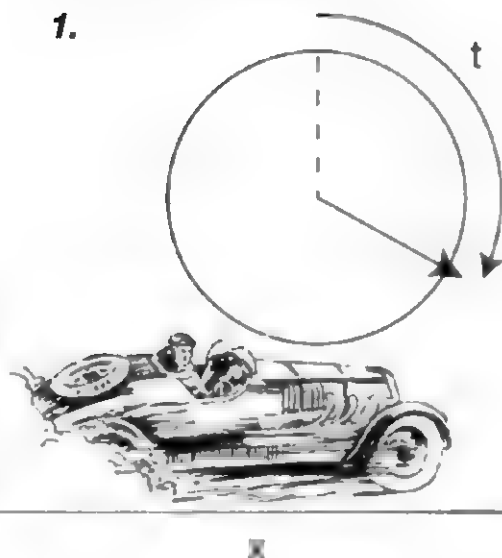


IL TRAITE DE  
QUANTITÉS QUI VARIENT  
CONSTAMMENT.

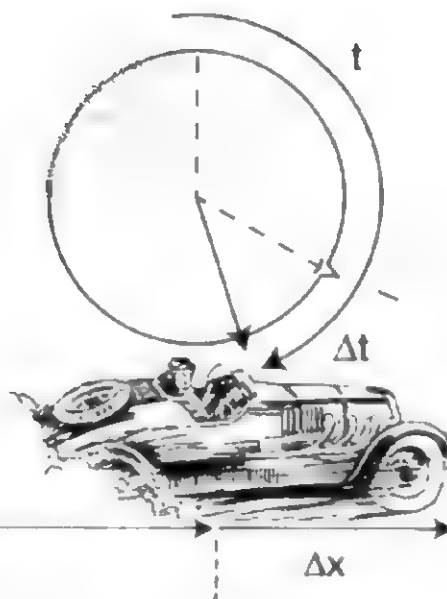
Le processus qui permet de déterminer à quel taux une quantité varie s'appelle la **différentiation**. Quand nous calculons la dérivée d'une fonction, nous obtenons une valeur qui indique son *taux de changement*.

Prenons le cas d'un véhicule qui se déplace sur une route. Sa position change constamment. À l'instant  $t$ , sa position  $x$  est représentée par une fonction continue  $x(t)$ .

1.



3.



2.

Le véhicule continue d'avancer et après un incrément de  $t$ , symbolisé par  $\Delta t$ , il aura atteint sa nouvelle position  $x + \Delta x$ .

4.

Le véhicule atteint sa nouvelle position à un instant différent, qui est donné par la somme  $t$  (le temps original) +  $\Delta t$ .

Quelle est la vitesse moyenne du véhicule sur ce parcours ? On l'obtient en divisant la distance parcourue par le temps écoulé ( $\Delta t$ ) entre l'origine et la nouvelle position. Autrement dit :

$$\Delta x / \Delta t = f(t + \Delta t) - f(t) / \Delta t.$$

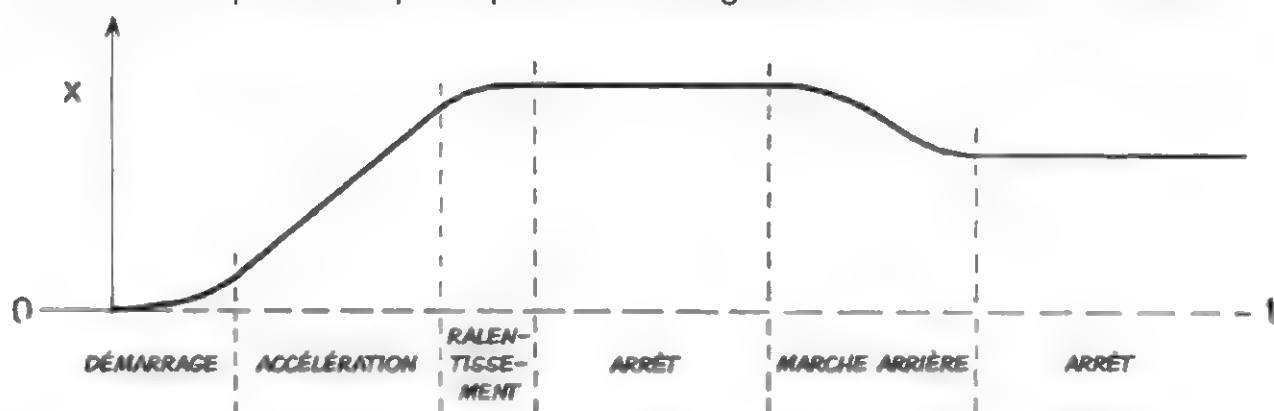


Par conséquent, supposons que nous voulons définir la vitesse d'un corps en mouvement – qui peut être un véhicule – à l'instant  $t$  ou le taux de changement de  $x$  à cet instant  $t$ . Nous pouvons essayer de réduire l'incrément  $\Delta t$  autant que possible,  $\Delta t$  devenant si petit qu'il s'approche de zéro. Nous disons à présent que la **limite** de la vitesse moyenne  $\Delta x / \Delta t$ , avec une valeur de  $\Delta t$  qui s'approche de zéro, est sa vitesse instantanée. On écrira  $dx/dt$  et on l'appellera la **dérivée** de  $x$ .

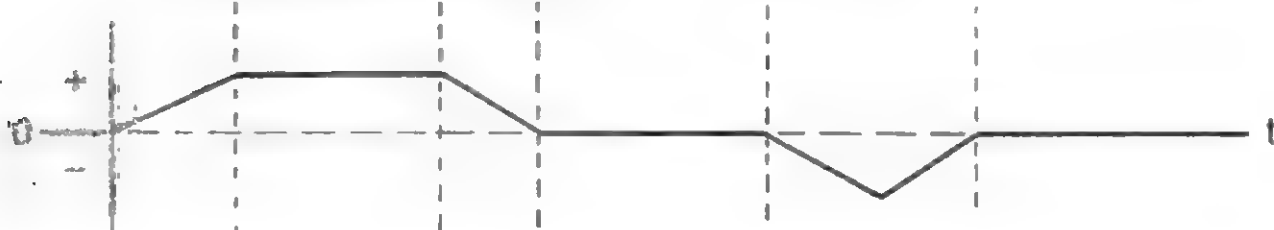




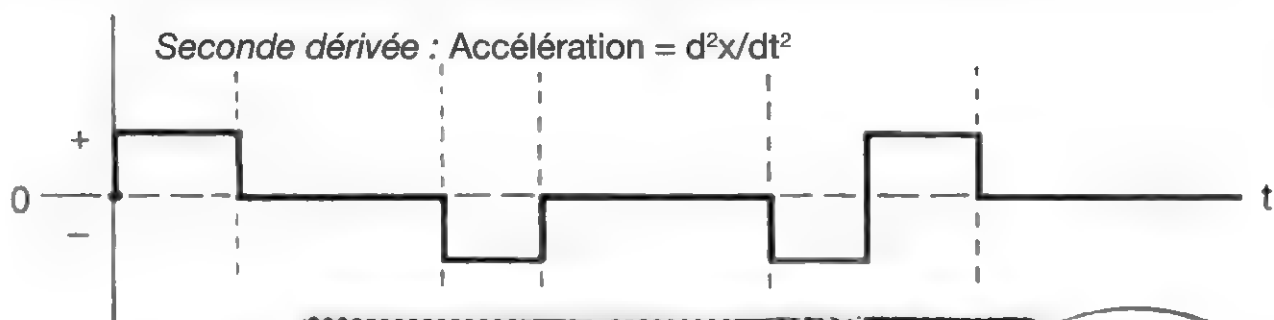
Si, en parallèle, nous traçons le graphique de  $x$  en fonction du temps, la dérivée est représentée par la pente de la tangente à cette courbe à l'instant  $t$ .



Première dérivée : Vitesse =  $dx/dt$



Nous pouvons aussi prendre la dérivée de la première dérivée, donc la seconde dérivée, ce qui – dans le cas de notre véhicule sur la route – indique le taux de changement de la vitesse, c'est-à-dire son accélération.



WAOUH!  
C'ÉTAIT UN PEU  
COMPLIQUÉ,  
NON?

TU  
N'AS RIEN VU,  
VOICI À PRÉSENT  
UN AUTRE BOUT  
D'ANALYSE.

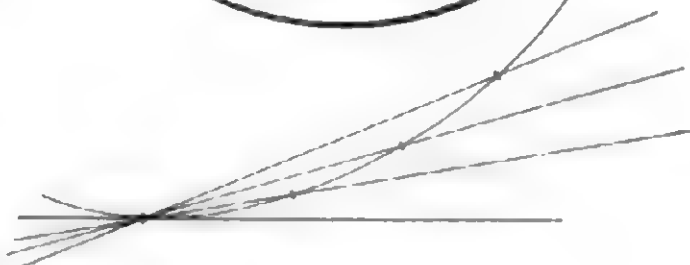
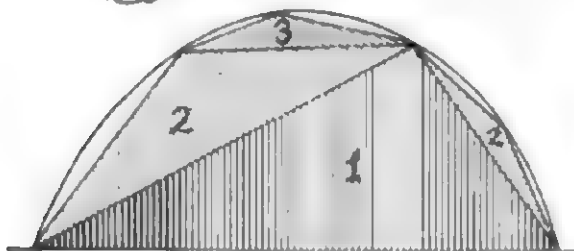


# INTÉGRATION



ET MAINTENANT,  
ABORDONS LE COUP DE  
MAÎTRE, LE RAPPORT QUI A  
RENDU LE CALCUL DIFFÉRENTIEL  
SI PUISSANT, AVEC LE  
FORMALISME LE PLUS  
PUISSANT JAMAIS  
ATTEINT.

IL Y AVAIT  
DEUX CATÉGORIES DE  
PROBLÈMES (RELATIFS AUX  
PROPRIÉTÉS DES COURBES),  
L'UN TOUCHANT LA COURBE  
TOUT ENTIÈRE ET L'AUTRE  
UN POINT SINGULIER DE  
LA COURBE.

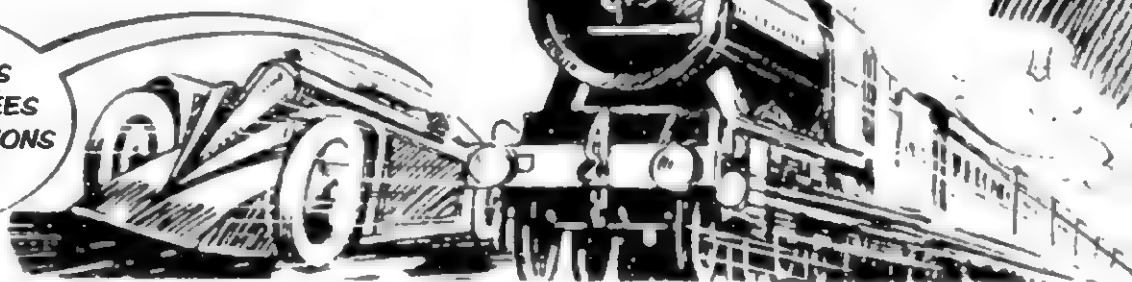


Le premier problème a  
été résolu par l'approche  
dite d'«épuisement»;

et le second en traçant des  
cordes à la courbe passant  
par le point singulier.

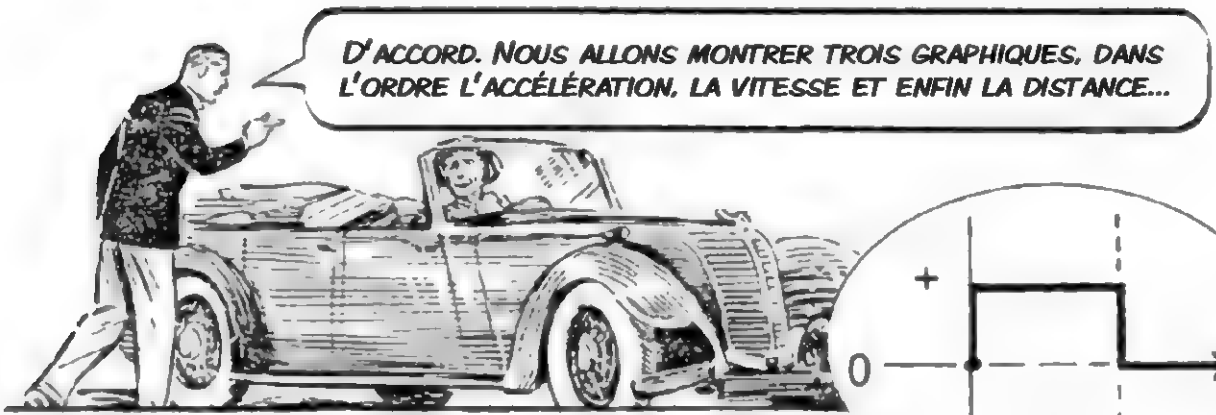
D'autres courbes étaient perçues comme  
des graphiques de fonctions, et dès lors, on  
pouvait considérer les problèmes d'aires de deux  
points de vue différents. D'un côté, une aire peut  
être «épuiée» en y insérant de minces bandes  
verticales; de l'autre, l'aire vue comme **une nouvelle  
fonction** est justement celle dont la dérivée est  
égale à la fonction initiale. Survient alors une seule  
méthode, qui prend en compte les dérivées et leurs  
fonctions inverses, résolvant du même coup  
les deux catégories de problème.

COMMENÇONS  
PAR LES DÉRIVÉES  
ET LEURS FONCTIONS  
INVERSES.



Nous pouvons examiner comment la procédure est mise en œuvre  
dans le cas de notre véhicule qui avance et pour les trois graphiques de  
distance, de vitesse et d'accélération. Au lieu de regarder les graphiques  
en partant de la fonction de distance  $x(t)$  et de progresser par les dérivées,  
commençons l'analyse au niveau des dérivées pour ensuite remonter le  
problème et finir la fonction de distance.



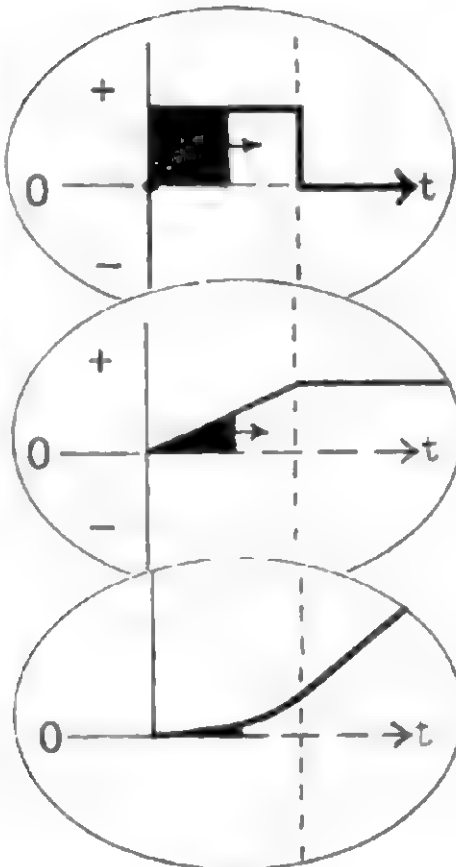
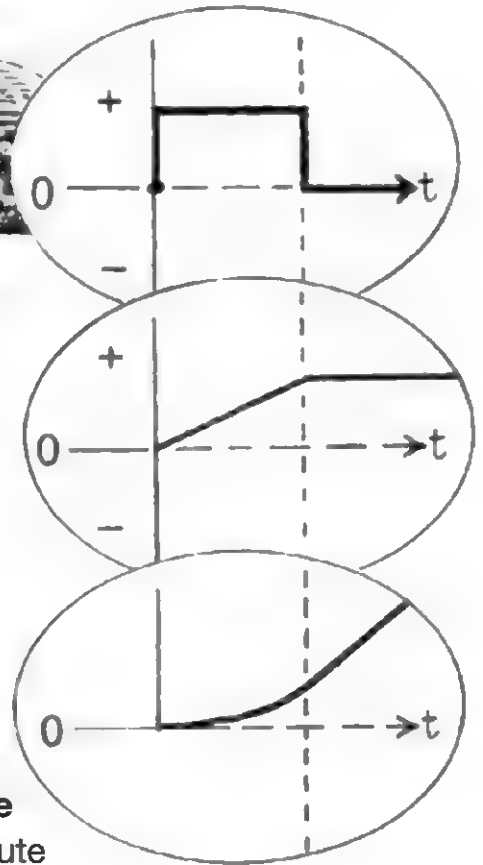


Au départ, le bord gauche des graphiques montre une accélération positive, c'est-à-dire signifiant que la vitesse augmente (ce qui arrive quand nous nous mettons en route).

Nous observons qu'une accélération constante produit un graphique qui est une droite pour la représentation de la vitesse,

et une courbe (plus précisément une parabole) pour celle de la distance.

Observez à nouveau, pendant qu'un point avance dans le temps le long d'axes qui définissent une **aire** sous les deux courbes du bas. C'est ici la clef de toute l'affaire... alors regardez bien.



Dans le graphique d'accélération, l'aire qui grandit couvre peu à peu un rectangle; l'aire augmente proportionnellement au temps passé. Et vous constatez que c'est exactement le comportement du graphique de vitesse!

Et le graphique de vitesse définit un triangle qui s'accroît, son aire augmente d'abord lentement puis plus rapidement;

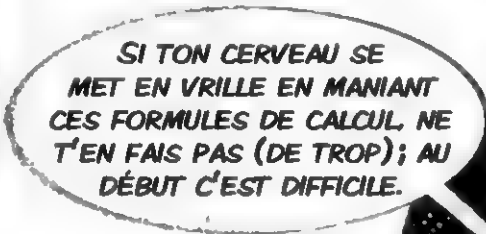
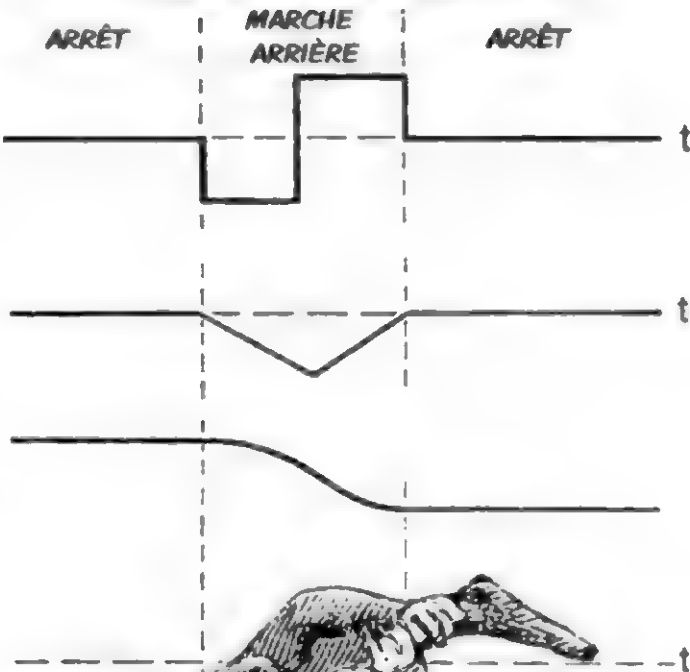
et vous constatez que c'est exactement la forme du graphique de vitesse!

Nous pouvons voir que si l'une des fonctions est la **dérivée** (ou taux de changement), alors l'autre est la **fonction d'aire** de la première!



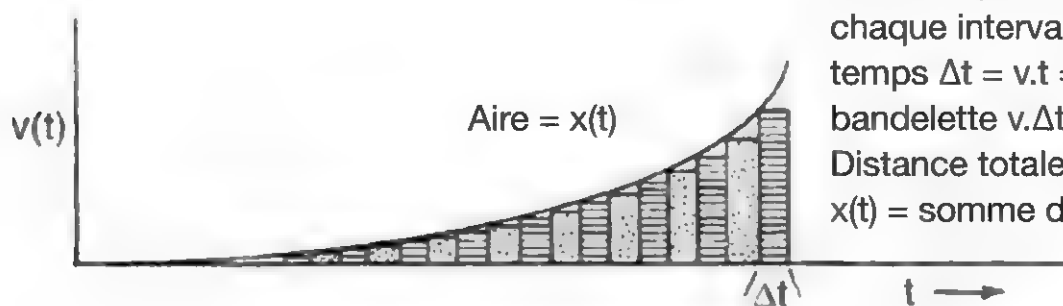
Vous pouvez vérifier ces affirmations par vous-même, pour voir ce qui se passe quand le véhicule engage la marche arrière. L'accélération devient alors négative, construisant une aire négative (sous l'axe  $t$ ); ainsi, la vitesse devient négative de façon constante.

Et vous pouvez noter qu'au fur et à mesure que la distance augmente, la courbe diminue (comme une parabole à l'envers). Quand le véhicule s'arrête, son accélération devient nulle en même temps que sa vitesse, et la distance parcourue devient constante.



TOUT CE QUI NOUS RESTE À FAIRE EST DE VOIR COMMENT L'AUTRE CONCEPT DES INTÉGRALES, CELUI DES AIRES, S'ACCOMMODE AVEC CELUI DES INVERSES DÉRIVÉES. C'ÉTAIT D'AILLEURS L'APPROCHE ADOPTÉE PAR NEWTON, TANDIS QUE LEIBNIZ AVAIT COMMENCÉ AVEC DES AIRES, QU'IL VOYAIT COMME DES SOMMES DE BANDELETES, INFINIMENT MINCES.

Si l'on commence avec une courbe de vitesse  $v(t)$ , nous pouvons imaginer son «aire» couverte de minces bandelettes. Chaque bandelette a une base  $\Delta t$  et une hauteur  $v(t)$ .



Distance parcourue pour chaque intervalle de temps  $\Delta t = v \cdot t = \text{aire de la bandelette } v \cdot \Delta t$   
Distance totale parcourue  $x(t) = \text{somme des aires } v \cdot \Delta t$ .

Le point est ici le symbole « que multiplie ».

La valeur de l'aire complète est donc

**somme** de {toutes les bandelettes  $v(t) \cdot \Delta t$ }.

Chacune des aires décrit une distance  $x$ , parcourue à vitesse constante  $v$  dans un intervalle de temps  $t$ .

ALORS, DISONS QUE LES INTERVALLES DEVIENNENT INFINITÉSIMALEMENT PETITS ET QUE NOUS POUVONS LES «LISSER» POUR OBTENIR LA BASE  $dt$  : LA SOMME PEUT ÊTRE ALORS REPRÉSENTÉE PAR UN SYMBOLE SPÉCIAL



$$\int v(t) dt$$





Pour en revenir au rapport inverse dérivée, nous devons simplement imaginer la dernière des bandelettes minces, soit  $\Delta x$ .

Puisque  $\Delta x = v \cdot \Delta t$

alors  $\Delta x / \Delta t = [v \cdot \Delta t] / \Delta t$

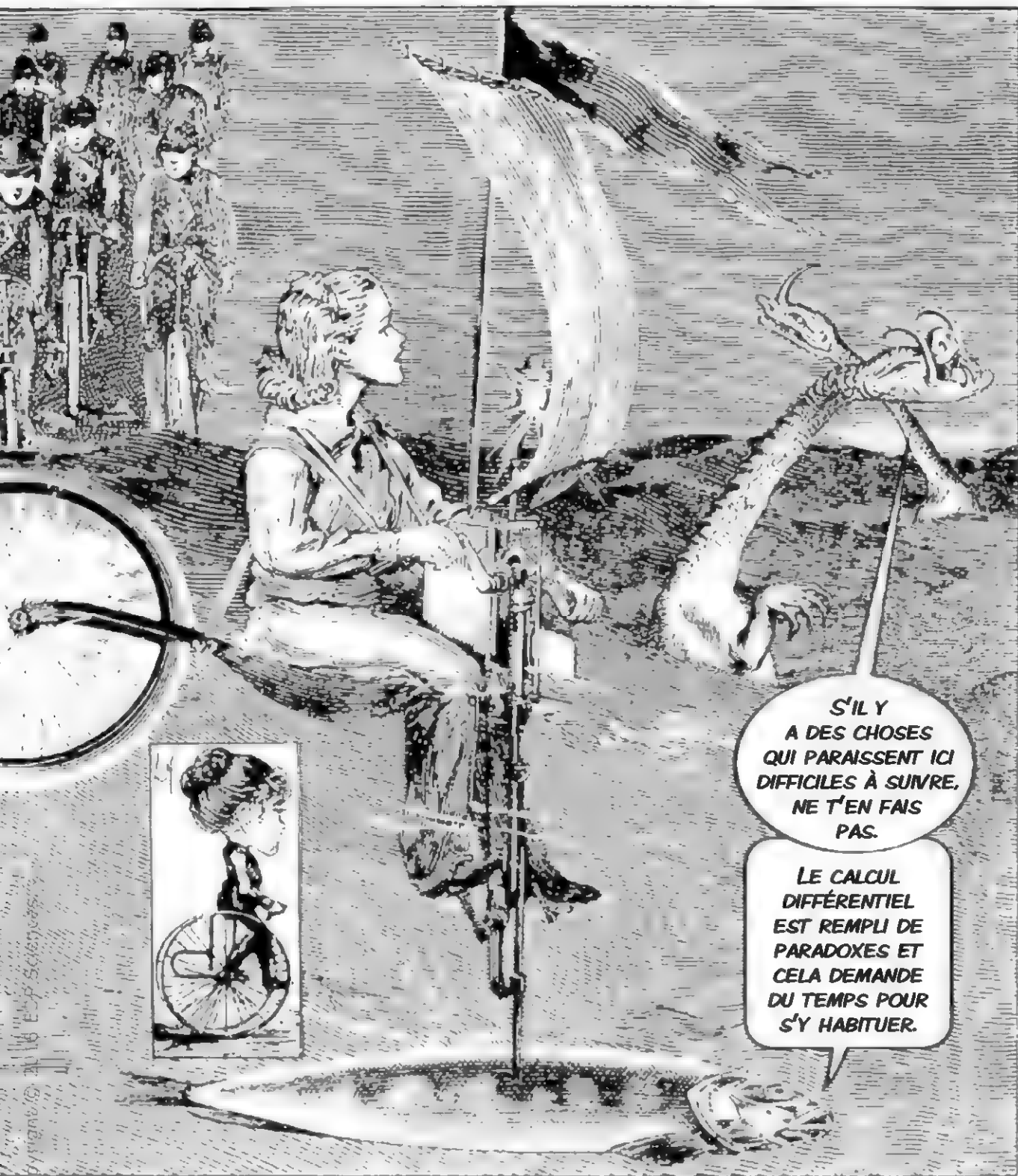
et  $dx/dt = v(t)$ .

Ainsi, la dérivée de l'intégrale définie comme la somme des bandelettes est simplement la même fonction dont l'aire a produit l'intégrale.

Il devient (relativement) facile d'identifier les dérivées de fonctions exprimées de façon algébrique ou en termes de certaines fonctions spéciales. Pour trouver, par exemple, la forme algébrique de la fonction aire, nous devons trouver la fonction particulière dont la dérivée est la fonction d'origine.

Certains problèmes des propriétés de courbes (prises en entier) sont réduits à des problèmes plus simples de propriétés de courbes à un point singulier.





Au début, le calcul intégral s'appliquait à la mécanique et à l'astronomie. Les techniques dites des équations différentielles ont mené à la physique mathématique. Et alors seulement nous avons vu émerger les sciences de la chaleur, de l'électricité et le magnétisme. Le monde scientifique moderne, qui sous-tend le monde de la technologie moderne, dépend assez étroitement des développements du calcul intégral et différentiel.

# LES QUESTIONNEMENTS DE BERKELEY

Revenons au concept de l'incrément et du mystère de le voir se réduire à zéro. En leur temps, Newton et Leibniz ont été questionnés à ce sujet mais n'ont pas su donner de réponses satisfaisantes. C'est par la suite que le philosophe irlandais (et évêque anglican) **George Berkeley** (1685–1753) a reformulé les questions de façon très nette.

Tiré du livre Newton de William Blake

J'OBSERVE QUE  
LORSQUE L'ON FORME DES  
QUOTIENTS AVEC UN INCRÉMENT,  
CELA A UN SENS SEULEMENT SI  
SA VALEUR N'EST PRÉCISÉMENT PAS  
ZÉRO; AUTREMENT, NOUS SERIONS  
EN TRAIN DE FAIRE UNE DIVISION  
PAR ZÉRO ET CELA N'EST  
PAS AUTORISÉ.



CET INCRÉMENT  
EST-IL TOUJOURS AUTRE  
QUE ZÉRO, OU PEUT-IL  
PRENDRE LA VALEUR ZÉRO  
EXACTEMENT OU EST-CE LE  
«FANTÔME D'UNE QUANTITÉ  
DISPARUE»?

À PART  
CETTE QUESTION,  
MON VIEUX,  
MESSIRE NEWTON  
EST NU.

L'objectif de Berkeley était de démontrer que les « libres penseurs »  
– qui défendaient la thèse que la science et la raison remplaceraient  
prochainement les mystères et les superstitions des croyances religieuses  
– étaient aussi obscurs et dogmatiques que les pires théologiens. Dans  
le sous-titre de son pamphlet, Berkeley pose la question de savoir « [...] »  
si l'objet, les principes et les inférences des analyses modernes étaient  
plus distinctement conçues ou plus clairement  
dédites que les Mystères de la Religion  
et les dogmes de foi. Pour Berkeley, la  
réponse était clairement...

**NON!**



Certains mathématiciens ont essayé de fournir des réponses au pamphlet de Berkeley, intitulé *The Analyst*. Berkeley a utilisé leurs réponses pour mettre en évidence leurs confusions et ce, de manière très cruelle. Sa réponse, sous le titre *A Defence of Freethinking in Mathematics* (Pour la défense de la libre pensée en mathématiques) est un véritable chef d'œuvre d'analyse critique.



*« Les hommes apprennent les éléments des sciences d'autres hommes ; et chaque apprenant, surtout chez les jeunes, fait preuve d'une déférence plus ou moins grande envers l'autorité, au point que peu d'entre eux s'appesantissent au niveau des principes et préfèrent croire ce qu'ils entendent : et les choses que l'on accepte jeunes, en les répétant deviennent familières : et cette familiarité à la longue devient une preuve, une évidence. »*

Berkeley avançait l'idée que le simple apprentissage de méthodes pour résoudre des problèmes mathématiques ou scientifiques ne nous aide pas forcément à comprendre la nature profonde des problèmes. Il a anticipé l'image que nous a laissée **T. S. Kuhn** (1922–1995) qui voyait « la science normale » comme une pratique de « résolutions de puzzles » au sein d'un paradigme qui n'admet pas de questionnement critique, tant que cela fonctionne. Pour Kuhn, la science normale est assez étriquée, et l'enseignement des sciences (y compris les mathématiques) est nécessairement plutôt dogmatique.



# LE DIEU D'EULER

Il revient à un mathématicien suisse, **Leonhard Euler** (1707–1783) d'avoir été le premier à faire le lien entre fonctions exponentielles et logarithmiques et à avoir établi une formule de cette relation.

Euler était un génie mathématique extraordinaire et les récits de ses prouesses sont « légion ». Il était employé à la cour de Frédéric II, dit le Grand, de Prusse, où il a rencontré l'encyclopédiste et philosophe **Denis Diderot** (1713–1784). Diderot était un athée endurci...

JE METS  
AU DÉFI LE PIEUX  
EULER DE PRODUIRE  
UNE PREUVE  
MATHÉMATIQUE DE  
L'EXISTENCE DE  
DIEU.

$(a + b^n)/n = x$   
DONC DIEU EXISTE.  
VOTRE RÉPONSE ?

Diderot était abasourdi  
et s'est réfugié dans la  
sécurité et le réconfort  
des salons parisiens.



La formule dont il est question dans cette histoire n'a rien de spécial.  
Mais Euler a également développé une des plus belles formules existant  
en mathématiques, qui invite à s'arrêter un instant pour y réfléchir.

Il s'agit d'une formule transcendante et mystérieuse qui relie cinq des  
nombres les plus fondamentaux de l'Univers




$$e^{\pi\sqrt{-1}} + 1 = 0$$

En sens inverse, le premier est le zéro, un quasi-nombre mystérieux.

Ensuite vient l'unité, 1, le fondement de tous les autres nombres. Il apparaît également sous une formulation négative, la racine carrée de moins un,  $\sqrt{-1}$ , désigné aussi par «i», qui est l'unité de base des nombres imaginaires ayant fasciné tant de cultures et de civilisations. Puis vient la plus ancienne des constantes,  $\pi$ , qui donne le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre. Et le dernier nombre, celui qui a été découvert le plus récemment, est le nombre e, c'est-à-dire la base naturelle de la croissance exponentielle.

Peut-on imaginer avoir découvert un tel rapport par tâtonnements et expérimentations, aussi longtemps que ceux-là puissent durer ?

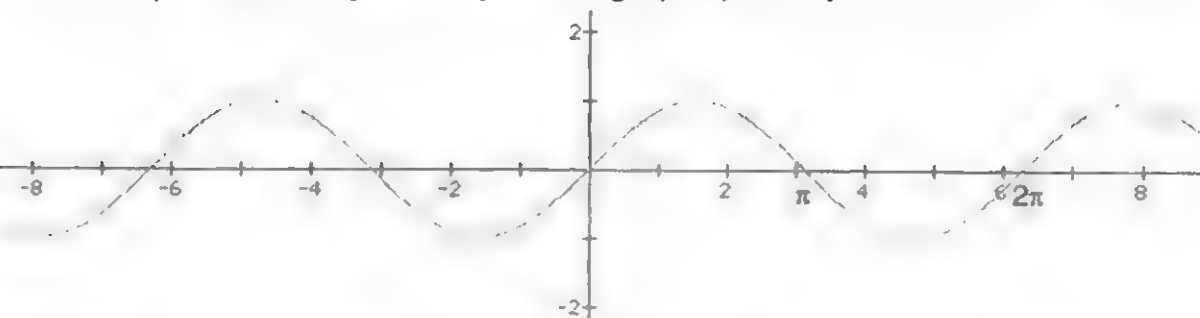
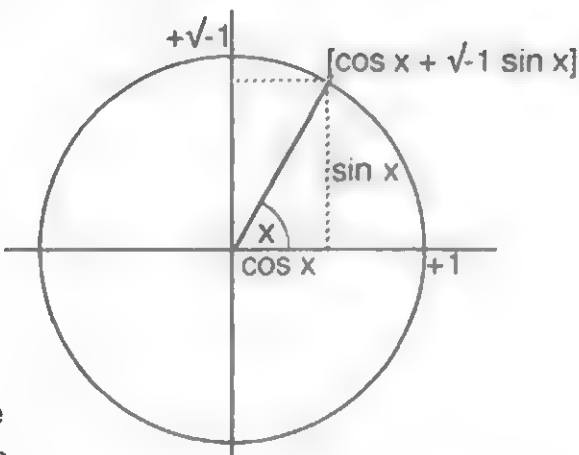
En réalité, la formule divine d'Euler vient d'une fonction qu'il avait découverte, reliant les nombres complexes aux fonctions trigonométriques découvertes par les mathématiciens arabes (voir p. 85).

Nous avons déjà vu que la fonction  $e^x$  correspond à un graphique avec croissance rapide (voir p. 99). En revanche, le graphique de  $e^{j(-1)x}$  est un cercle ! Le rayon de ce cercle est 1 et  $x$  est l'angle formé par la droite de l'origine jusqu'au point. Et comme le point parcourt la circonférence du cercle,  $x$  augmente, passant de 0 à  $2\pi$ . Si maintenant nous examinons le graphique d'un point de vue trigonométrique, nous notons que la partie réelle du nombre  $e^{j(-1)x}$  est le cosinus de  $x$  ( $\cos x$ ) et la partie imaginaire  $\sin x$ .

Nous pouvons donc écrire :

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$  où  $i$  est le symbole couramment employé pour  $\sqrt{-1}$ .

Si le point parcourt la circonférence une seconde fois, et que  $x$  continue donc de croître, quel sera le résultat ? Les fonctions  $e^{ix}$ ,  $\cos x$  et  $\sin x$  se répètent. On dit alors qu'elles sont **périodiques** ; le graphique de  $y = \sin x$  ressemble à :



En réalité, cela représente un certain nombre de phénomènes qui « alternent » avec le temps, comme le courant électrique, ou des ondes qui se propagent dans l'espace, comme le son. Les sinus et les cosinus sont les blocs de toutes les formes complexes d'ondes qui véhiculent de l'information ou des messages. En s'en servant pour faire des mathématiques, on peut, avec cette forme « exponentielle imaginaire », transformer des calculs particulièrement ardues en exercices relativement simples et clairs.

DONC, MA DIVINE  
FORMULE ABAT  
PAS MAL DE TRAVAIL  
DANS UN MONDE  
TECHNOLOGIQUE ET  
INDUSTRIEL.



Nous avons vu qu'Euclide avait déduit ses compétences en géométrie à partir de quelques « notions courantes » et de quelques postulats « évidents ». L'un de ces postulats, à propos de la non-convergence de lignes parallèles, ressemble davantage à un théorème. Il a créé l'embarras pendant des siècles, car il jetait des doutes sur la véracité et la perfection du « système » euclidien. Mais il est soudain devenu la base d'un grand bond en avant dans l'imagination mathématique : à savoir l'invention de la géométrie non euclidienne.



## LES GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES

Plusieurs mathématiciens y sont parvenus, le premier d'entre eux ne le sachant pas ! C'était un jésuite, **Giovanni Girolamo Saccheri** (1667–1733) résolu à en finir avec les objections, une fois pour toutes. Dans son livre *Euclid cleared of all blemish* (Euclide blanchi de toute tare), publié en 1733, il a tenté de démontrer qu'il serait, somme toute, impossible de faire de la géométrie sans le postulat sur les droites parallèles.



En réalité, ses résultats n'avaient rien de faux et ont été même repris par de réels inventeurs, qui savaient ce qu'ils faisaient.

Il y a de nombreuses façons d'exprimer le Postulat des parallèles. Pour nous, si nous avons une droite et un point hors ligne, il ne peut y avoir qu'une droite qui passe par ce point, parallèle à la première droite. Si ce n'est pas le cas, il n'existe aucune parallèle, ou il en existe plusieurs.



Tout d'abord, le cas évoqué de nombreuses parallèles a été découvert, presque en même temps, par deux mathématiciens, le Hongrois **Janos Bolyai** (1806–1860) et le Russe **Nikolai Lobachevski** (1792–1856). Un peu plus tard, l'Allemand **Georg Riemann** (1826–1866) a étudié le second cas, c'est-à-dire avec **aucune** parallèle. On s'est alors rendu compte que ces formes de géométrie pouvaient être mises en œuvre par des constructions sur des surfaces spéciales.

Dans le cas de la géométrie de Riemann, la sphère est une bonne illustration, si nous adoptons la convention que « ligne » signifie « grand cercle » (orthodromie). C'est la courbe sur la surface faite par un plan qui passe par le centre de la sphère. (Voir p. 84 pour la trigonométrie sphérique.) Puisque deux grands cercles doivent nécessairement se rencontrer en deux endroits ; par conséquent, il ne peut y avoir de parallèles.

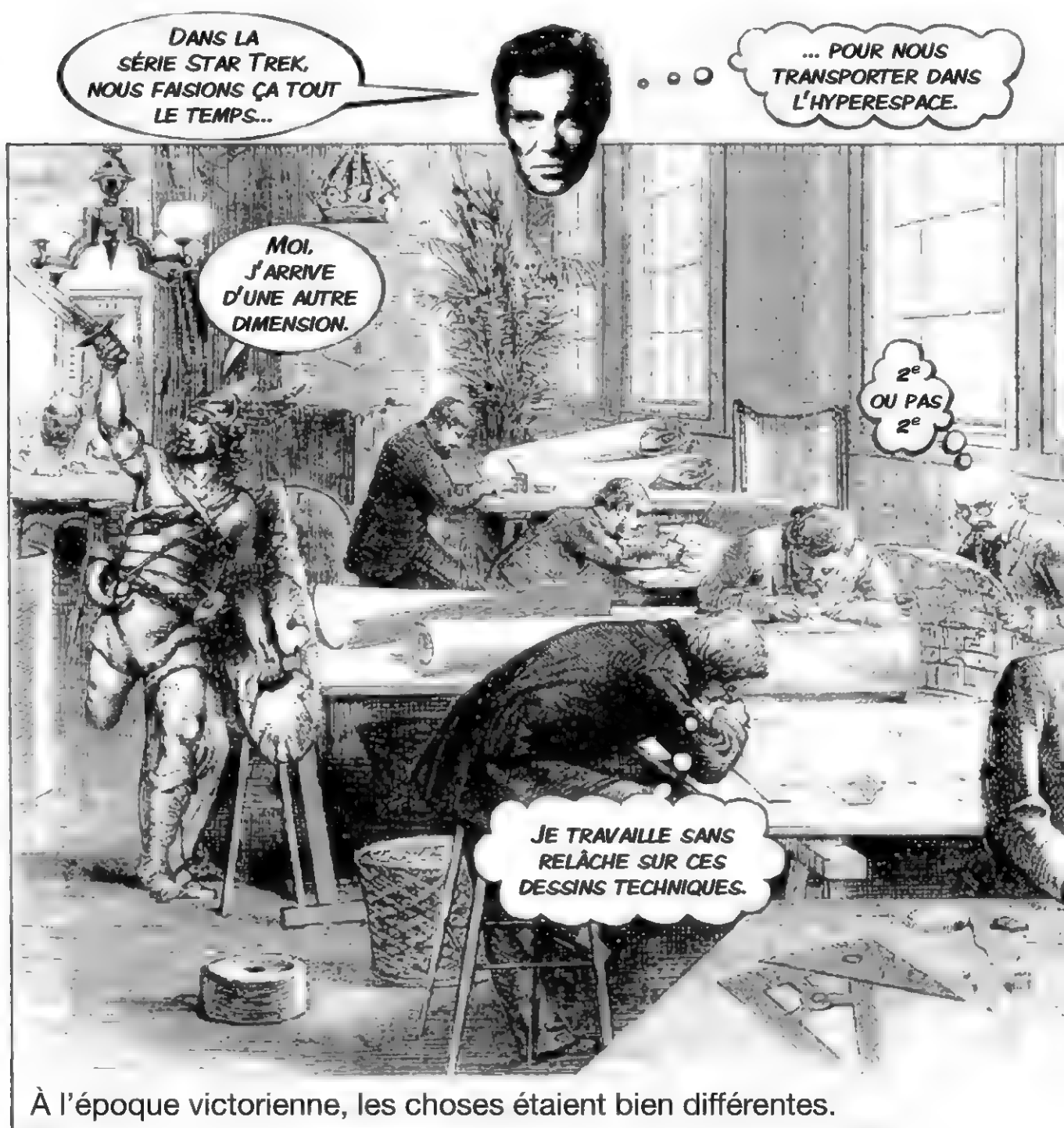


Nous pouvons assimiler une « ligne » au chemin le plus court entre deux points. Or, il se trouve qu'il y a de nombreuses « parallèles » qui ne rencontreront jamais cette ligne.

Au fur et à mesure que les gens s'habituèrent à l'idée de géométries non-euclidiennes, cela renforçait le credo que les mathématiques apportent des vérités à la fois logiques et infaillibles. Mais il a fallu longtemps avant que cette idée révolutionnaire soit admise pour de bon.

# LES ESPACES À N DIMENSIONS

Un autre développement contre-intuitif en géométrie concernait l'étude des espaces construits avec plus de trois dimensions ? Une extension du système cartésien de la géométrie algébrique pour inclure d'autres dimensions était tout à fait simple. Au lieu de se positionner sur un plan avec les coordonnées  $(x, y)$ , un point défini dans l'hyperespace pouvait avoir les coordonnées  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ . Bien entendu, les propriétés des courbes dans de tels hyperespaces étaient très différentes de celles rencontrées dans deux ou trois dimensions. Mais le fait de concevoir des systèmes avec de nombreuses dimensions ne pose aucun problème de nos jours.

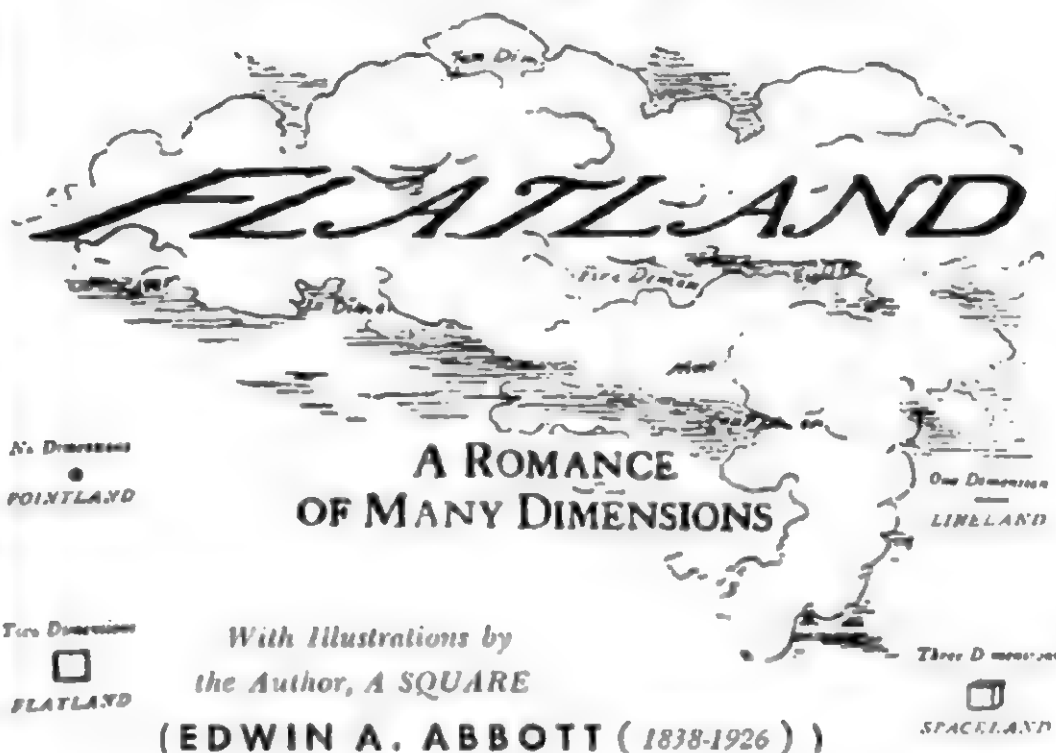




Un petit chef d'œuvre de fiction mathématique et de critique sociale s'intitule *Flatland* (Plat Pays) traite du sujet. Il décrit une société où les habitants sont des polygones, vivant sur un plan. Tout comme les victoriens, les Flatlanders sont obnubilés par leur statut social, fonction du nombre de côtés qu'ils possèdent. Les gentilshommes en ont quatre, les aristocrates beaucoup, les ouvriers trois et les femmes sont fines comme des aiguilles !

Le héros du livre, dénommé *Square* (« Carré »), a une expérience d'un monde à trois dimensions, s'étant lié d'amitié avec une Sphère. Cet être supérieur n'apparaît que tous les 500 ans, se manifestant d'abord comme un point qui devient un cercle, grandit, puis diminue pour finalement disparaître. Ce que les Flatlanders ne comprennent pas, c'est comment la Sphère passe au travers de leur plan. La Sphère prend le *Square* en amitié et l'emmène faire un voyage dans l'espace. Elle lui montre « Lineland » et « Pointland », peuplés de gens très satisfaits d'eux-mêmes. Elle lui permet de scruter la vie privée des Flatlanders. Mais, de retour sur le plan, le *Square* souffre beaucoup. Il essaie de décrire l'Espace à ses amis Flatlanders mais comment se faire valoir auprès d'eux ? Ceux-là le trouvent sérieusement atteint, dérangé.

*« Ô jour, ô nuit, que tout est merveilleusement étrange ici. »*



TOUT COMPTE FAIT, J'ÉTAIS DÉÇU PAR LA SUPPOSÉE CLAIRVOYANCE DES ÊTRES À DIMENSION SUPÉRIEURE !

# ÉVARISTE GALOIS

Pendant tout le  $\text{xix}^{\text{e}}$  siècle, l'algèbre a connu un « puissant » essor, comme outil d'investigation, de généralités et d'abstractions. Elle est devenue de plus en plus **formelle**. Petit à petit, a émergé l'idée que ce système de formalisme pouvait s'appliquer à autre chose que les nombres et leurs applications arithmétiques.

Un grand pas dans ce sens a été franchi par le mathématicien français **Évariste Galois** (1811–1832), sans aucun doute l'un des personnages les plus tragiques de l'histoire des mathématiques. C'était un ardent républicain dans une période de vives réactions politiques. Il se peut que le jeune Évariste ait été victime d'*agents provocateurs* officiels, qui avaient manigancé une affaire de cœur entre le malheureux et la fiancée d'un célèbre duelliste. C'est ainsi qu'il est mort, à l'âge de 21 ans. « Je meurs victime d'une infâme coquette », écrit-il la veille de sa mort, dans un manuscrit contenant toutes ses idées. Document qui a failli être perdu mais finalement a été retrouvé et publié 14 ans plus tard.

Galois s'était attaqué à un vieux problème : trouver une solution en racines carrées à l'équation quintique générale  $x^5 + \dots = 0$ . De son vivant, il y avait un consensus parmi les mathématiciens selon lequel la tâche était impossible, mais personne n'a réussi à le démontrer.



C'EST  
BIEN CE QUE JE  
VOULAIS FAIRE ET, AU  
COURS DE MES ANALYSES,  
JE SUIS TOMBÉ SUR UNE  
NOUVELLE IDÉE, À SAVOIR  
LE CONCEPT DES  
GROUPES.

IL  
AVAIT  
BEAUCOUP  
D'AVANCE  
SUR SES  
PAIRS.



# LES GROUPES

Les groupes sont des structures mathématiques définis par des éléments et des règles de combinaison. On peut les considérer comme des systèmes arithmétiques mais sans nombres. Les éléments qui les composent peuvent ne pas avoir de lien avec du comptage ou avec des mesures, et ils ne sont pas des « nombres » dans le sens habituel du terme. Galois s'était rendu compte qu'il pouvait y avoir des séquences d'opérations se comportant comme des additions.



Ces séquences obéissent à quelques propriétés seulement :

- pour deux éléments quelconques, il existe un troisième qui résulte d'une combinaison des deux premiers, telle que  $2 + 2 = 4$ ;
- il existe un élément « identité », qui ne modifie pas l'élément auquel il est combiné, tel que dans  $2 + 0 = 2$ ;
- pour tout élément, il existe une inverse qui, lorsqu'elle est combinée à l'élément, donne l'identité ; ainsi  $2 + (-2) = 0$ .



Pour l'illustrer, voici une version très simplifiée de ce que Galois a fait ; en l'occurrence, un ensemble de quatre objets,



Ceux-ci ne sont pas les éléments du groupe. Le groupe comprend les opérations de manipulation de ces quatre objets. Nous imaginons un « cycle » en bougeant, par exemple, les éléments d'une place, ce qui donne :



ou de deux places, ce qui donne :

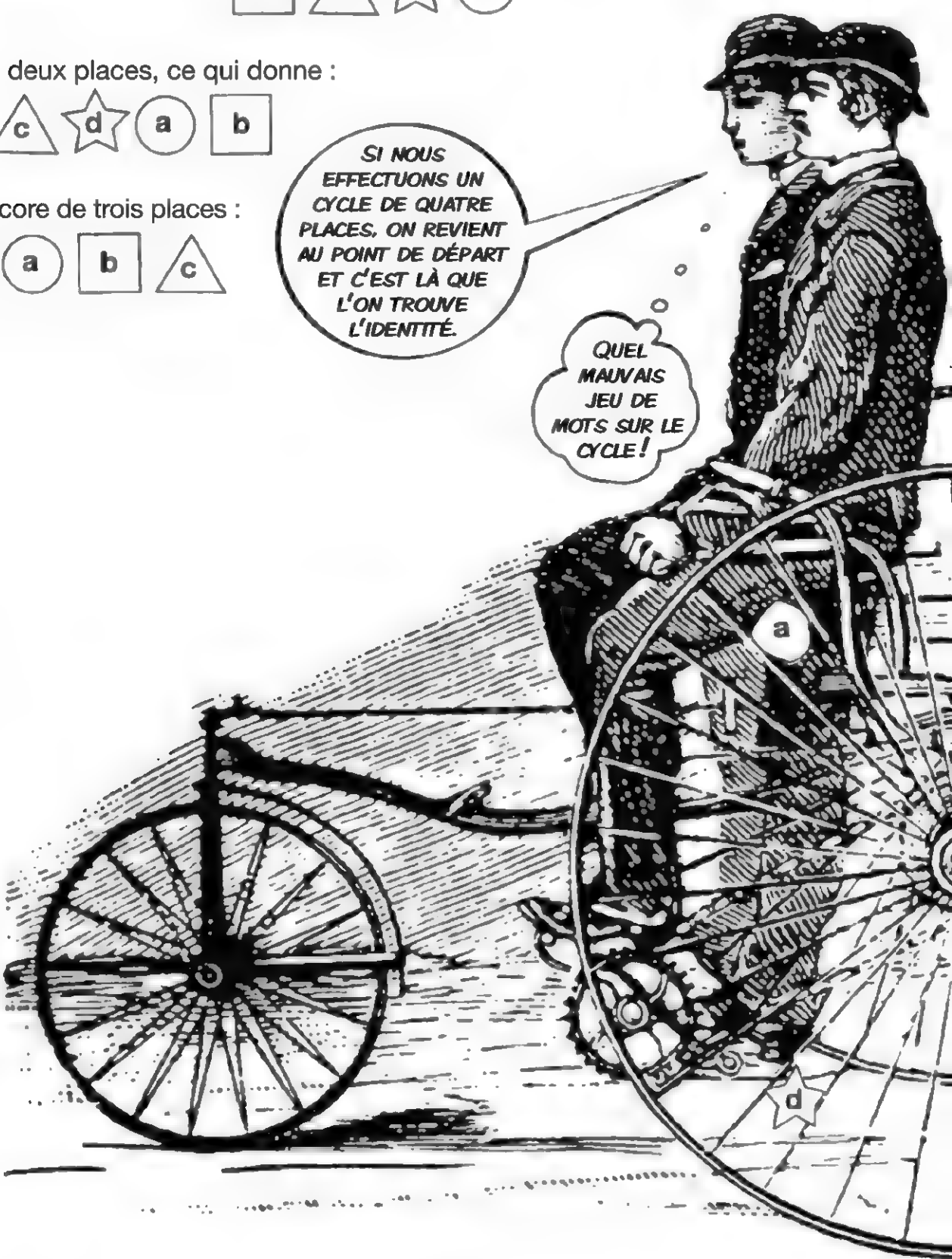


ou encore de trois places :



SI NOUS  
EFFECTUONS UN  
CYCLE DE QUATRE  
PLACES, ON REVIENT  
AU POINT DE DÉPART  
ET C'EST LÀ QUE  
L'ON TROUVE  
L'IDENTITÉ.

QUEL  
MAUVAIS  
JEU DE  
MOTS SUR LE  
CYCLE!



On aurait pu désigner les cycles par les majuscules A, B, C et I. Dans ce cas,  $A + C$  est équivalent à un «cycle» de  $1 + 3$  places, c'est-à-dire de quatre places au total, soit trois plus une identité! Il est alors facile de construire une table d'additions complète avec cet ensemble de quatre éléments.




CE NE  
SONT PAS DES  
NOMBRES MAIS ILS  
POSSÈDENT LEUR  
PROPRE FORME  
D'ARITHMÉTIQUE.

	I	A	B	C
I	I	A	B	C
A	A	B	C	I
B	B	C	I	A
C	C	I	A	B

Bien que l'exemple donné soit on ne peut plus simple, il renferme une idée de taille, à savoir que des mathématiciens peuvent examiner les propriétés d'un système d'opérations défini par une table d'additions. Nous n'avons pas besoin d'exemples de système pour des processus physiques tels que le mouvement, ou d'objets algébriques comme les racines d'une équation. La structure se définit par elle-même. De telles structures n'ont pas besoin d'être des «groupes»; il peut y avoir aussi un second jeu de combinaisons, une sorte de «table de multiplication».

# L'ALGÈBRE DE BOOLE

Bientôt, les scientifiques commencent à examiner d'autres formes d'opération. L'une des analyses les plus percutantes a été menée par un mathématicien britannique, **George Boole** (1815–1864), analyse qui a permis d'appliquer des méthodes mathématiques à des entités non quantifiables, telles que les arguments de logique.




EN TOUTE MODESTIE, J'AI DONNÉ LE NOM DE «LOIS DE LA PENSÉE» À MES DÉCOUVERTES.

En langage contemporain, on parle de l'algèbre de combinaison d'ensembles ou de «l'algèbre de Boole».

NOTRE INTERVENTION COMPREND À LA FOIS DES OPÉRATIONS D'UNION (S'ENTEND QUE L'ENSEMBLE QUI EN RÉSULTERA POSSÉDERA TOUS LES MEMBRES DE CHAQUE ENSEMBLE) ...

JE PRÉFÉRERAI, SI CELA NE DÉRANGE PERSONNE, NE PAS PERDRE DE MEMBRE PENDANT L'OPÉRATION...

... ET D'INTERSECTION (SIGNIFIANT QUE L'ENSEMBLE FINAL N'AURA QUE DES MEMBRES AYANT APPARTENU AUX DEUX ENSEMBLES INITIAUX).



L'ALGÈBRE DE BOOLE ENTRE EN JEU CHAQUE FOIS QUE NOUS DEVONS FAIRE DES CHOIX ENTRE PLUSIEURS OPTIONS. DE MÊME, C'EST LA LOGIQUE QUI SOUS-TEND DES RECHERCHES SUR INTERNET.



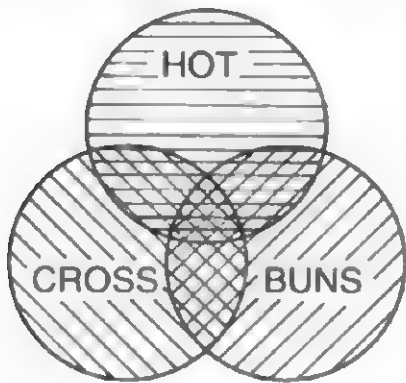
Supposons que nous cherchons une recette de cuisine pour faire des « Hot Cross Buns\* », dont les mots clefs sont :

HOT, CROSS et BUNS.

Le moteur de recherche va nous demander d'indiquer si nous voulons les sites Internet contenant :

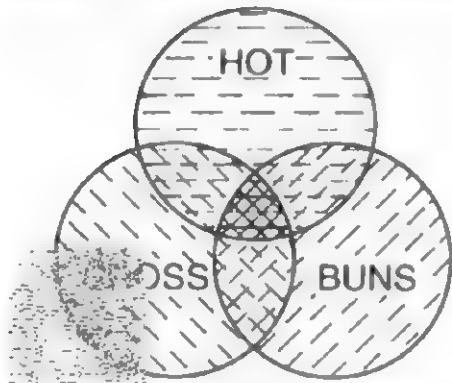
N'importe lequel des mots clefs ou Tous les mots clefs simultanément

Le premier choix va nous lister tous les sites avec soit HOT, soit CROSS, soit BUNS. Si maintenant nous en donnons la représentation graphique (appelée « diagrammes de Venn »), nous voyons :



En termes d'ensembles,  $\{HOT\} + \{CROSS\} + \{BUNS\}$ , cela donne une longue liste de sites avec beaucoup d'informations intéressantes mais non pertinentes par rapport à ce qui est recherché.

Si nous voulons « Hot Cross Buns » et rien d'autre, il s'agit d'une intersection avec les seuls sites qui contiennent et « hot » et « cross » et « buns ». Le diagramme de Venn correspondant est :



En termes d'écriture d'ensembles, cela donne  $\{HOT\} \times \{CROSS\} \times \{BUNS\}$  et la recherche aboutira uniquement au(x) site(s) qui traite(nt) de « Hot Cross Buns ».

ÉTANT DONNÉ  
QUE BON NOMBRE DE  
PROGRAMMES D'ORDINATEUR  
PROPOSENT DE FAIRE DES  
CHOIX, PLUTÔT QUE D'EFFECTUER  
SEULEMENT DES OPÉRATIONS  
D'ARITHMÉTIQUE AVEC  
DES NOMBRES

EN FRANÇAIS,  
ON PARLE  
D'ORDINATEURS

L'ALGÈBRE  
DE BOOLE EST  
FONDAMENTALE DÈS  
LA CONCEPTION DE CES  
PROGRAMMES.

\*Ed. Le petit pain brioché des Anglais, traditionnellement réalisé le jour du Vendredi Saint, à Pâques

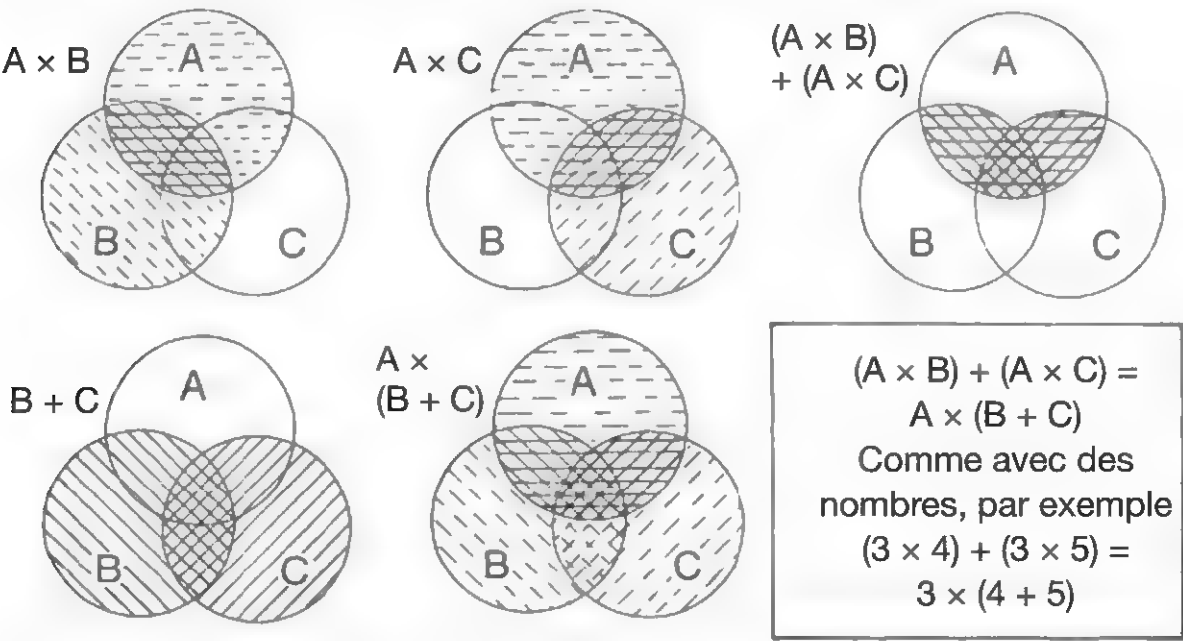


L'arithmétique de l'algèbre de Boole est intéressante dans ce sens qu'à la différence de l'arithmétique « ordinaire », nous avons affaire à deux formes de relation distributive :

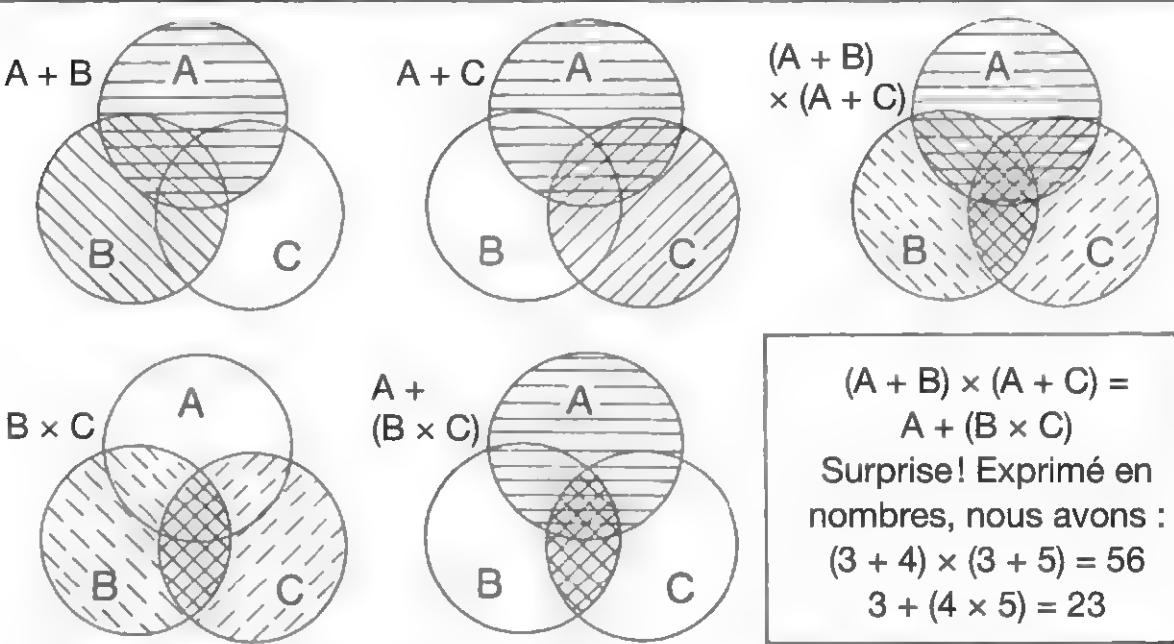
$$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C) \qquad \text{mais aussi} \qquad A + (B \times C) = (A + B) \times (A + C).$$

En termes d'arithmétique ordinaire, la première formule marche, tandis que la seconde ne marche pas. Mais dans le cas d'ensembles, où  $\times$  est le symbole d'intersection et  $+$  le symbole d'union, les deux formules fonctionnent, comme on le voit dans le diagramme de Venn.

Voici la loi distributive qui marche, comme avec des nombres :



et pour la surprise...



Des exemples comme ceux-ci ont offert aux mathématiciens de vastes champs de liberté pour exercer pleinement leur imagination. L'arithmétique telle qu'étudiée par les mathématiciens modernes est devenue rapidement très différente de celle que nous avons pratiquée avec des nombres.

# CANTOR ET LES ENSEMBLES

Pendant que certains se souciaient d'opérations avec les nombres, d'autres s'interrogeaient sur la notion d'infini. Des ensembles réellement infinis étaient livrés aux spéculateurs, aux mathématiciens et aux mystiques. Le mathématicien allemand **George Cantor** (1845–1918) s'est courageusement donné comme but de « dompter l'infini ».



*J'AI DÉMONTRÉ COMMENT  
CONSTRUIRE DE TELS ENSEMBLES  
ET COMMENT LES « COMPTER ».*

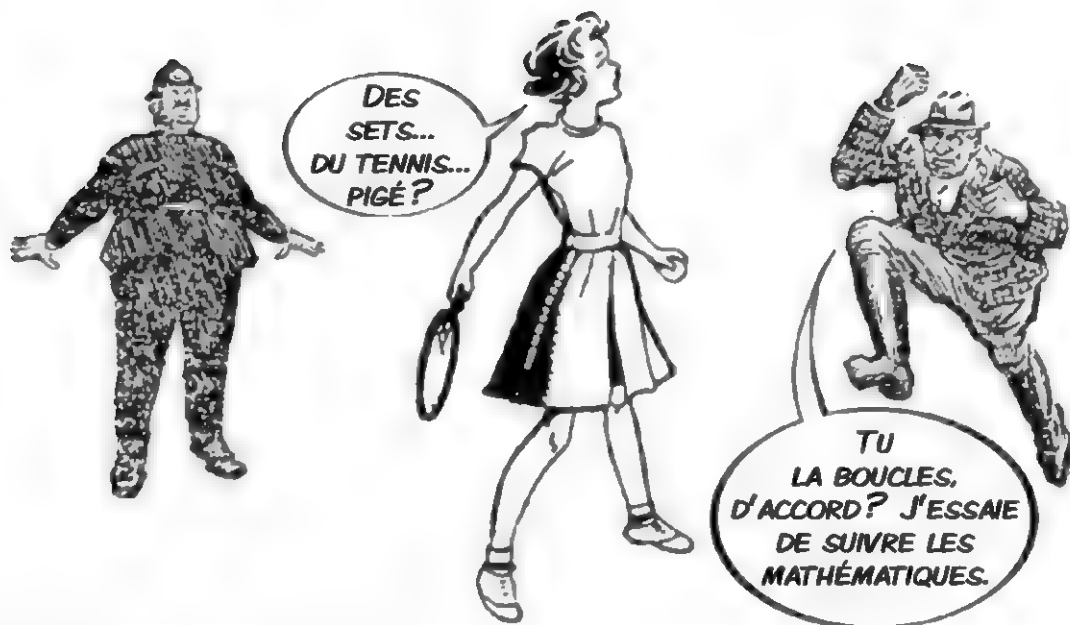
Cantor a donné une méthode pour compter tous les nombres fractionnaires, dans un schéma comme celui-ci :

1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1
1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	
1/3	2/3	3/3	4/3		
1/4	2/4	3/4			
1/5	2/5				
1/6					

*ÇA ME TROTTE  
DANS LA TÊTE, LES  
GARS : EST-CE TROP  
TÔT POUR FAIRE UN  
JEU DE MOT SUR  
LE CANTER ?*

Voici à présent la règle pour énumérer toutes les fractions. Regardez comment les flèches commencent, en partant de la case en haut à gauche, puis avancent en diagonale vers le bas et vers la gauche, de 2/1, puis de 3/1. Vérifiez, chemin faisant, si un nombre a déjà été compté (exemple :  $2/4 = 1/2$ ) et dans ce cas éliminez-le, sinon gardez-le. En même temps, réduire les fractions à leur expression la plus simple, exemple :  $2/1 = 2$ .



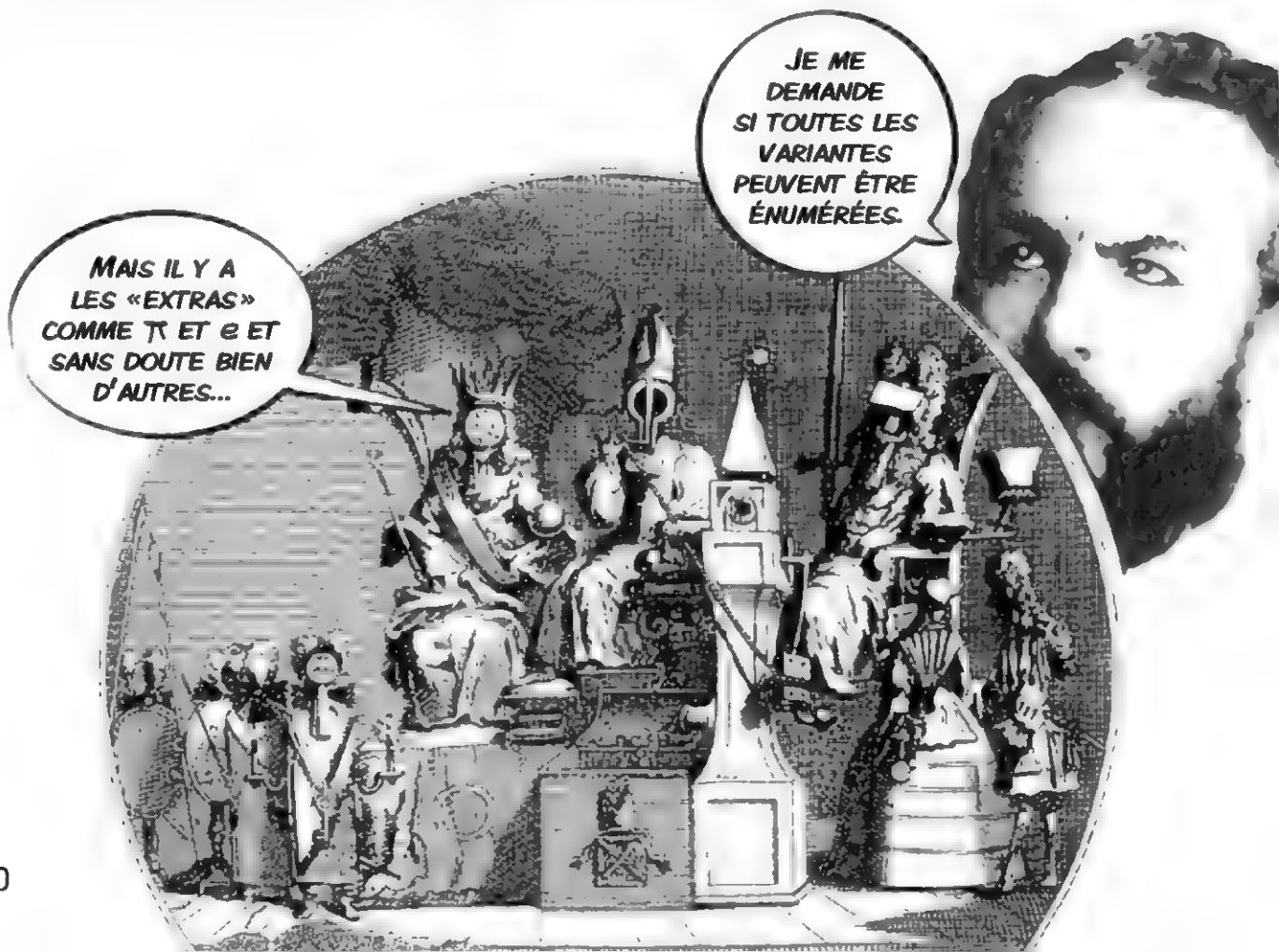


Nous avons alors la séquence :

1, 2,  $1/2$ , 3,  $1/3$ , 4,  $3/2$ ,  $2/3$ ,  $1/4$ , 5...

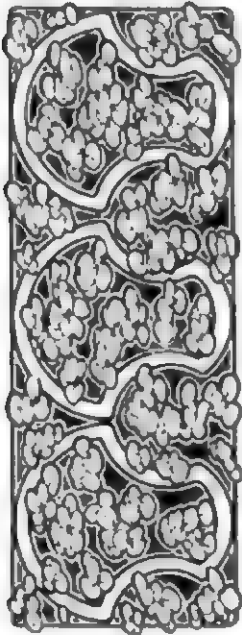
Vous pouvez constater que c'est la même chose que de regarder toutes les fractions (y compris les entiers) dont le numérateur et le dénominateur forment un total de 2, puis de 3, puis de 4... et en commençant par le plus grand numérateur à chaque fois. On atteindra n'importe quel nombre, n'importe quel entier, n'importe quelle fraction à plus ou moins longue échéance.

De même, tous les nombres qui sont des solutions à des équations algébriques, tels que  $\sqrt{2}$  et  $\sqrt{-1}$ , peuvent être énumérés.



En réalité, les travaux de Cantor, ont démontré exactement le contraire de ce qu'il voulait. Ainsi, il a découvert que l'ensemble comprenant tous les « nombres réels », les points sur une ligne, ne peut être énuméré. Sa preuve tient en quelques lignes seulement, mais vous devez y prêter attention.

Supposons que tous les nombres ont été justement énumérés, comme les fractions ou les nombres algébriques. Nous aurons donc une longue liste, infiniment longue comme celle que nous avons construite précédemment. Et, tout comme pour les fractions, les nombres inscrits sur la liste ne se



suivent pas par ordre de taille.

Pour rester simple, prenons tous les nombres réels entre 0 et 1, avec leurs expansions décimales. La liste pourrait avoir l'allure suivante :

$$N_1 = 0,716\ 693\ 2...$$

$$N_2 = 0,422\ 589\ 6...$$

$$N_3 = 0,779\ 641\ 9...$$

$$N_4 = 0,322\ 895\ 2...$$

LES NOMBRES  
DONNÉS ICI SONT  
CHOISIS DE MANIÈRE  
ARBITRAIRE !

Les «trois points» après la section décimale signifient, par convention, que la série continue indéfiniment.



Les «trois points» inscrits à la suite de  $N_4$  signifient que la série de nombres  $N_x$  également s'étend indéfiniment.

SI TOUS LES  
NOMBRES RÉELS SONT  
INSCRITS VÉRITABLEMENT DANS  
LA LISTE, ALORS N'IMPORTE QUEL  
NOMBRE QUE NOUS CONSTRUISONS  
SERA ÉGALEMENT DANS  
LA LISTE.

ET, SI  
CELA N'EST  
PAS LE CAS,  
NOUS DEVRONS  
ADMETTRE  
QUE TOUS  
N'ONT PAS  
ÉTÉ INCLUS.





Alors comment est-il possible de construire un nombre qui ne figure pas sur la liste ? Nous devrions d'abord supposer que nous en possédons un qui soit différent du premier nombre à la première place, différent du second nombre à la deuxième place, et ainsi de suite. Nous pouvons construire un tel nombre en plaçant le chiffre de chaque place à une place plus loin que celui de la liste.



POUR LA  
LISTE QUE NOUS  
AVONS TROUVÉE, NOUS  
AVONS DONC...

1<sup>re</sup> place : 7 → 8  
2<sup>de</sup> place : 2 → 3  
3<sup>e</sup> place : 9 → 0  
4<sup>e</sup> place : 8 → 9  
.....

Comme vous pouvez le constater, les nombres choisis n'ont strictement aucune importance en soi. Ils pourraient être tout autres.

Aussi, le nouveau nombre, que nous pouvons appeler « étrange », est (pour la liste ci-contre) :

$S = 0,830\ 9...$

Et voici la chute de l'histoire...



OÙ DONC  
SE TROUVE  
S SUR LA  
LISTE ?

PAS EN  
1<sup>re</sup>, NI EN 2<sup>e</sup> NI  
EN 3<sup>e</sup> PLACE... EN  
RÉALITÉ, IL NE SE  
TROUVE NULLE  
PART !

PAR  
CONSÉQUENT,  
NOTRE PRÉSUPPOSITION  
QU'IL NOUS ÉTAIT POSSIBLE  
D'ÉNUMÉRER TOUS LES  
NOMBRES RÉELS EST  
FAUSSE.



Cantor a étudié deux niveaux de l'infini : les « numérables » (comme les nombres habituels) et les points sur une ligne. Mais comment les relier ? Il a développé ensuite une méthode pour générer et décrire des ordres d'infini plus élevés ! Pour ce faire, il est passé par la notion de « sous-ensembles ». Si nous avons un ensemble de trois éléments – a, b et c –, les sous-ensembles sont les paires ab, ac et bc, les éléments simples a, b et c plus (toujours par convention) l'ensemble « vide » (qui ne contient aucun élément) et l'ensemble des trois.



Si on les comptabilise, on s'aperçoit que le total des éléments est 8, soit  $2^3$ . Ce nouvel ensemble s'appelle l'ensemble de puissance de l'ensemble initial. Et si l'original possède N éléments, l'ensemble de puissance aura  $2^N$  éléments.

À présent, Cantor avait la possibilité de générer des ensembles sans cesse plus grands, simplement en créant des ensembles de puissance. Il a ainsi proposé un nouveau symbole pour désigner la taille de ces ensembles. Julf d'origine, il a adopté la première lettre de l'alphabet hébreu  $\aleph$ , l'aleph. Donc, si les ensembles numérables sont de la taille aleph-nul, ou  $\aleph_0$ , leur ensemble de puissance sera  $2^{\aleph_0}$  et ainsi de suite.

D'UN AUTRE CÔTÉ, L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS SUR UNE DROITE, C'EST-À-DIRE LE PREMIER ENSEMBLE « NUMÉRABLE », EST  $\aleph_1$ .

IL SEMBLERAIT RAISONNABLE DE SUPPOSER QUE  $2^{\aleph_0}$  EST STRICTEMENT ÉGAL À  $\aleph_1$ , MAIS C'EST LÀ UNE HYPOTHÈSE QUI A MYSTIFIÉ LES MATHÉMATICIENS PENDANT DES GÉNÉRATIONS.

# IMPOSSIBLE

ERRER DANS DES  
INFINIS ÉTAIT PLUTÔT  
EXCITANT, VOIRE DÉROUANT ;  
MAIS ÇA, C'ÉTAIT AVANT LE  
DÉSASTRE !

La raison en est que quand quelqu'un parle en termes aussi généraux, rien n'empêche alors d'invoquer un « ensemble de tous les ensembles » ; d'ensembles un tiers après tout, ça « tient » grammaticalement, n'est-ce pas ? Ce dernier ensemble doit être le plus grand ensemble possible, et sa taille aura un certain aleph, disons  $\aleph_F$ . Et, comme tout autre ensemble, il aura un ensemble de puissance, dont le nombre sera défini ainsi  $2^{\aleph_F}$

qui, de toute évidence, sera plus grand que  $\aleph_F$ . Ainsi, ce que nous avons défini comme le plus grand des ensembles, l'ensemble de tous les ensembles, peut générer un ensemble encore plus grand. Une idée qui se contredit, manifestement.

C'EST COMME  
LA REVANCHE DES  
ENFANTS QUE LES  
PROFESSEURS HOUSPILLEN  
APRÈS QU'ILS ONT POSÉ LA  
QUESTION : « MONSIEUR,  
C'EST QUOI LE DERNIER  
NUMÉRO ? »





## LA CRISE DES MATHÉMATIQUES

Les paradoxes de l'infini découverts par Cantor présentait une nouvelle catégorie de défi pour les mathématiciens. Il ne s'agissait plus de cas où l'objet mathématique semblait aller à l'encontre de l'intuition, comme  $\sqrt{-1}$  ou  $dx/dt$ . Ce sont plutôt des objets clairement contradictoires. Et pourtant, ils nous viennent d'arguments qui ne sont pas différents de ceux que l'on trouve dans les mathématiques classiques.



LES  
MATHÉMATIQUES  
ÉTAIENT EN  
CRISE.

Au début du xx<sup>e</sup> siècle, une armée de philosophes et de mathématiciens se sont déterminés à résoudre la crise.

LES  
MATHÉMATIQUES  
SONT-ELLES EN  
TRAIN DE SAPER  
LEURS PROPRES  
FONDATEMENTS ?



# RUSSEL ET LA VÉRITÉ MATHÉMATIQUE

Parmi ceux déterminés à résoudre la crise se trouvait **Bertrand Russel** (1872–1970). Sa longue carrière a embrassé la logique, la philosophie, l'éducation d'avant-garde et enfin la désobéissance civile, tant il était contre les armes nucléaires. Pour lui, les mathématiques représentaient la seule vérité vérifiable dans le monde, s'opposant aux revendications largement infondées de la religion.

J'AI ÉTUDIÉ  
(AVEC D'AUTRES)  
LES PARADOXES DE LA  
LOGIQUE, À LA RECHERCHE  
D'INDICES DE CE QUI  
N'ALLAIT PAS DANS  
LES ANALYSES DE  
CANTOR.

Certains paradoxes étaient connus déjà au temps des anciens Grecs. Par exemple, certaines affirmations dépendaient du sens précis à donner à « tous », comme dans « l'ensemble de tous les ensembles ».



D'AUTRES DÉPENDAIENT DE  
L'AUTORÉFÉRENCEMENT, TELLES QUE...

« CETTE  
AFFIRMATION  
EST  
FAUSSE. »

SI CE QUI EST PLACÉ ENTRE GUILLEMET'S  
EST VRAI, ALORS EN SE BASANT SUR  
SON CONTENU, C'EST FAUX...

... MAIS SI L'AFFIRMATION ENTRE  
GUILLEMET'S EST FAUSSE, ALORS EN SE  
BASANT SUR SON CONTENU, C'EST VRAI!

L'un des paradoxes des plus ingénieux concerne le « nommage ».  
 Définissons B comme « le plus faible des entiers non nommables en moins de 19 syllabes ». D'une manière ordinaire, ce serait un nombre plutôt grand qui aurait besoin de 19 syllabes. Par exemple : « sept cent mille millions de milliards » ne requiert que 9 syllabes.



Ce paradoxe est très sérieux, car il n'implique ni autoréférencement ni universalité. Il démontre à quel point il est difficile de secourir la certitude en mathématiques en procédant à un nettoyage des fondations.

La campagne a été finalement abandonnée, y compris par Russel.





ON A DÉVELOPPÉ UNE AUTRE LIGNE D'ATTAQUE : UNE DERNIÈRE TENTATIVE POUR SAUVER LA VÉRITÉ MATHÉMATIQUE.

L'APPROCHE CONSISTAIT À CONSIDÉRER LES ARGUMENTS MATHÉMATIQUES COMME DU FORMALISME ABSOLU, UNE COLLECTION DE SYMBOLES, ET DE VOIR SI OUI OU NON ILS POUVAIENT SE PRÊTER À UNE ANALYSE RIGoureuse DE CETTE MANIÈRE.



Une preuve deviendrait un ensemble de lignes de symboles, lesquels sont reliés les uns aux autres par des règles de transformation. La tâche consistait à montrer que des preuves « valides » se distingueraient des invalides, de sorte que n'importe quelle affirmation mathématique peut être démontrée comme étant soit VRAIE soit FAUSSE.

CEPENDANT, CE PROGRAMME ALLAIT BIENTÔT IMPLOSER EN RAISON DES TRAVAUX D'UNE DE SES RECRUES LES PLUS BRILLANTES. C'EST-À-DIRE MOI, KURT GÖDEL...



# LE THÉORÈME DE GÖDEL

**Kurt Gödel** (1906–1978) a publié son théorème en 1931 en réponse à **A. N. Whitehead** (1861–1947) et les travaux cosignés sous le titre *Principia Mathematica* (en trois tomes; 1910–1913) avec Bertrand Russel sur la logique symbolique.



Son astuce était de faire un nouvel usage des nombres. Il a attribué un nombre à chaque partie d'une affirmation mathématique, puis il les a combinés pour donner un nombre unique à chaque affirmation. Ensuite, se servant d'un argument qui rappelle l'approche de Cantor, il a produit un nombre monstrueusement grand, représentant une affirmation unique parfaitement claire mais qui ne pouvait être validée ou invalidée, dans un sens ou l'autre.



LE  
THÉORÈME DE  
GÖDEL A ACHÉVÉ,  
DÉFINITIVEMENT,  
LE RÊVE QUE LES  
MATHÉMATIQUES  
POUVAIENT ÊTRE UN  
ÉDIFICE FAIT DE  
VÉRITÉS RELIÉES  
ENTRE ELLES.

# LA MACHINE DE TURING

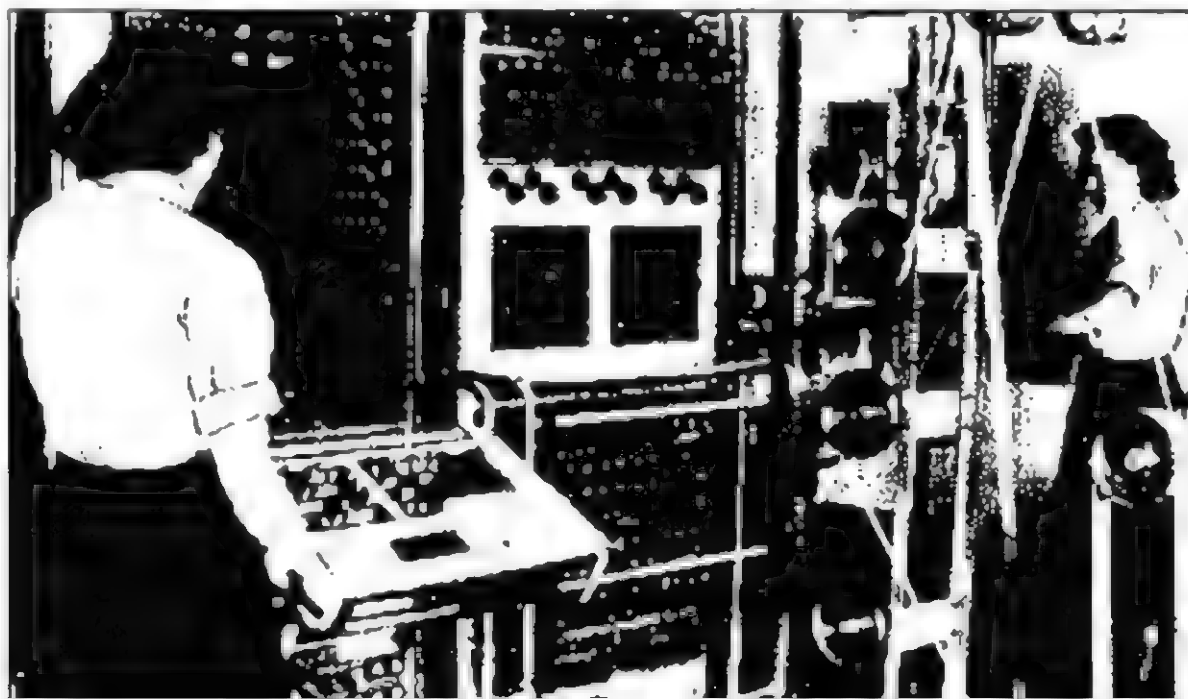
Une forme de force différente est venue de la « magnifique destruction » induite par les travaux de Gödel, car un certain **Alan Turing** (1912–1954) a bien émis l'idée que l'on pouvait générer des affirmations mathématiques de manière totalement abstraite.



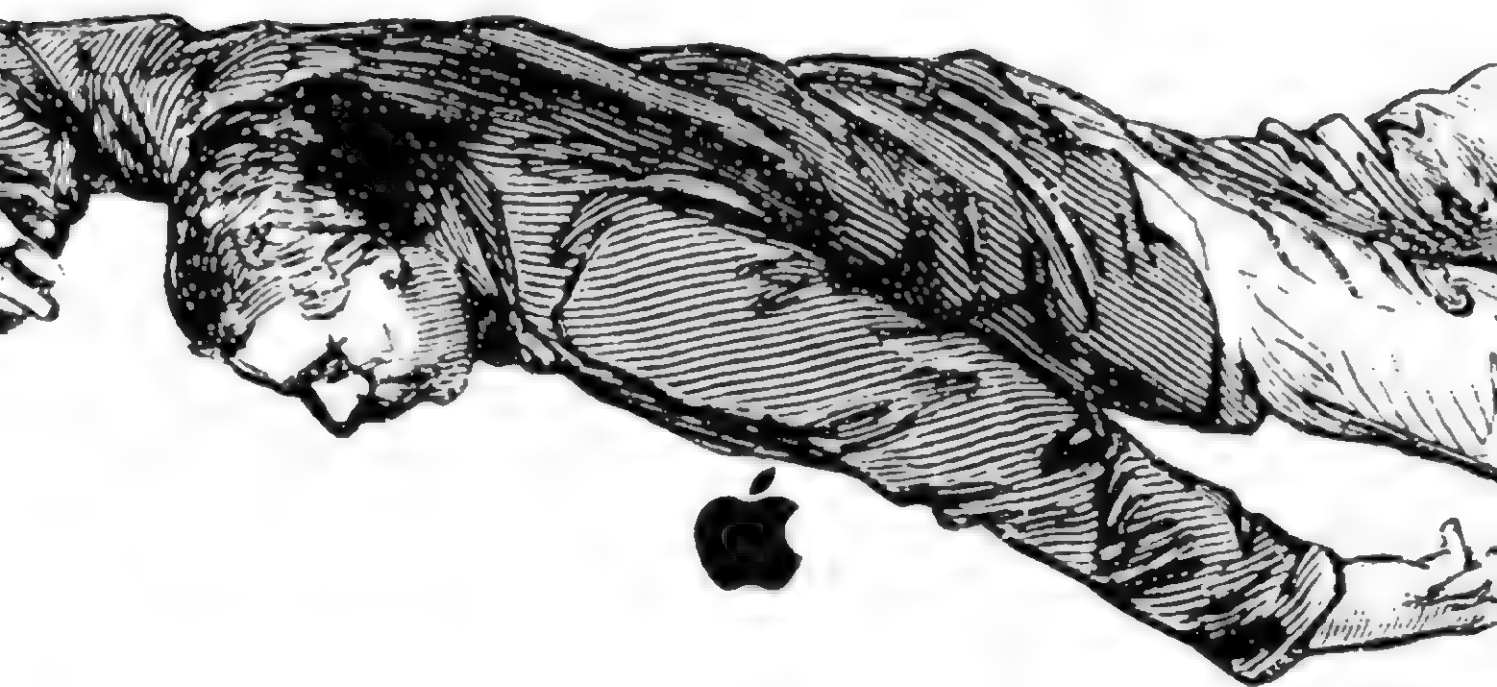
Sous ma responsabilité, cela revenait à concevoir un ordinateur très différent d'une machine à calculer mécanique.

Une « machine de Turing » comprenait une bande perforée et un programme qui réagissait (obéissait) à des informations inscrites dans chaque segment de la bande ; la machine exécutait alors les opérations les plus élémentaires. Étant donné le niveau de technologie dans les années 1930, son concept n'a strictement aucune utilité pratique. Toutefois, cela a fourni à Turing une version des méthodes de Gödel dont il avait besoin pour mener à bien ses recherches.

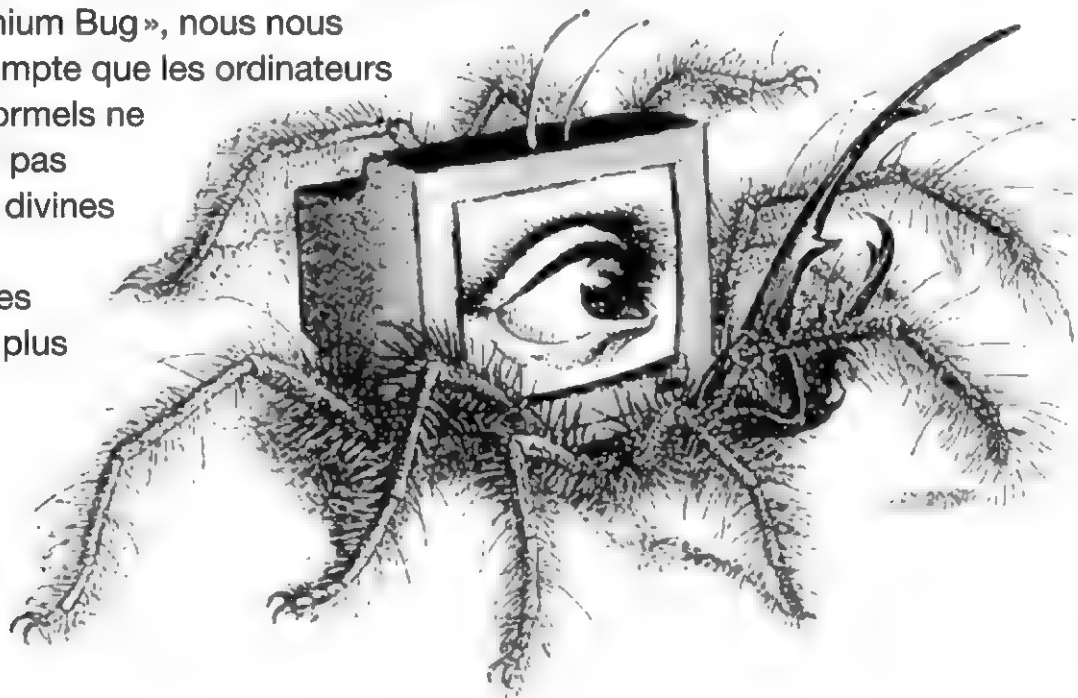
Bientôt, ses recherches sont devenues très utiles, car elles guidaient le développement des ordinateurs pendant la Seconde Guerre mondiale. Au début, il s'agissait de machines à calculer énormes, avec un programme externe (contrôlé par des boutons et des interrupteurs). Le grand changement consistait à intégrer le programme *dans* la machine, sous la forme d'un fichier à part, celui qui commande et dirige la succession d'opérations à mettre en œuvre. Il n'y avait donc plus de limitation à sa complexité ni à son adaptabilité.



Turing a même contribué à gagner la guerre, en tant que membre de l'équipe qui a « cassé » le système de codage de la machine à chiffrement/déchiffrement Enigma des Allemands. Mais il est décédé tragiquement, sans nul doute en succombant aux persécutions (et même inculpations) car il était homosexuel. Il est mort d'empoisonnement au cyanure et on a trouvé à côté de son corps sans vie une pomme imprégnée du poison mortel, qu'il avait visiblement croquée.



La vision de Turing (pouvoir créer un ordinateur abstrait) est devenue illusoire à la longue. Dans son schéma pour effectuer des opérations simples, il n'y avait pas de place pour des erreurs de programmation, et pas « besoin » de déboguer non plus. Pendant des décennies, on a estimé les ordinateurs infallibles ; les erreurs quelles qu'elles soient étaient nécessairement humaines. Mais aujourd'hui, avec la frayeur (infondée) du « Millennium Bug », nous nous rendons compte que les ordinateurs abstraits, formels ne constituent pas des vérités divines mais des assemblages on ne peut plus humains.





# LES FRACTALES

La puissance de calcul installée désormais dans nos ordinateurs a des effets sur les mathématiques. Les systèmes graphiques des ordinateurs a donné naissance, entre autres, à une nouvelle forme de géométrie, celle des **fractales**, comprenant des formes irrégulières mais particulières. Elles sont, comme on dit, « similaires entre elles », ce qui signifie que n'importe quel sous-système d'un ensemble de fractales est l'équivalent du système entier.

Les fractales  
sont de belles  
constructions  
étonnantes,

à la fois très complexes et  
particulièrement simples. Complexes,  
en raison de leurs infinis détails et  
de leurs propriétés mathématiques  
uniques (aucune fractale ne ressemble à une  
autre) ; simples, car résultant d'opérations  
particulièrement simples.

Nous commençons avec une équation simple de la forme  $x^2 + y$  où  $x$  est un nombre complexe variable et  $y$  un nombre complexe fixe. Nous choisissons deux nombres complexes et indiquons à l'ordinateur de procéder à leur addition et de substituer ce résultat à la valeur initiale de  $x$ , et ainsi de suite. Le résultat, graphiquement, est spectaculaire.



Benoît Mandelbrot (1924-2010), mathématicien français né en Pologne «découvreur»  
des fractales, les a décrites comme un moyen de contempler l'infini.

MON NOM  
EST ASSOCIÉ À LA  
CÉLÈBRE FRACTALE  
QUI FIGURE À LA  
PAGE 143, APPELÉE  
«L'ENSEMBLE DE  
MANDELBROT».

Aujourd'hui, on se sert de fractales pour avancer l'étude de phénomènes complexes comme  
les flux turbulents, la distribution de tremblements de terre, l'évolution de nos villes.  
Et la géométrie fractale a donné naissance aux mathématiques et à la théorie du chaos.



# LA THÉORIE DU CHAOS

La théorie du chaos décrit des phénomènes qui ne sont pas aléatoires, décrits par des équations différentielles et qui ne sont pas, de plus, prévisibles. La raison en est que de minuscules changements au niveau des conditions initiales peuvent induire de grands changements au niveau des solutions. L'affirmation la mieux connue (un peu exagérée, soit dit en passant) est :

LE BATTEMENT  
D'AILE D'UN PAPILLON  
PEUT CHANGER LA  
TRAJECTOIRE D'UNE  
TEMPÊTE.



Un comportement chaotique est fortement lié à la propriété fractale des systèmes. Ils sont « auto-similaires », de sorte qu'en changeant l'échelle à laquelle le comportement est décrit, nous avons toujours les mêmes formes de variabilité. Des phénomènes apparemment aléatoires, comme les changements des prix affichés à la bourse, possèdent cette propriété auto-similaire. C'est cela qui rend possible l'utilisation de la théorie du chaos pour gérer des portefeuilles d'actions.

LA PLUS GRANDE  
CONTRIBUTION, PEUT-ÊTRE,  
DE LA THÉORIE DU CHAOS À  
NOTRE COMPRÉHENSION DES  
MATHÉMATIQUES EST QUE NOTRE  
IGNORANCE GAGNE EN  
RESPECTABILITÉ.

ELLE A FOURNI  
AUX MATHÉMATICIENS  
CERTAINS PROBLÈMES  
AYANT TRAIT À  
L'IMPOSSIBILITÉ D'ATTEINDRE  
UNE CONNAISSANCE  
DÉTAILLÉE.

LA PREMIÈRE  
FOIS QUE LES  
QUESTIONS DE LA CERTITUDE  
EN MATHÉMATIQUES ONT  
ÉTÉ FINALEMENT CERNÉES, AU  
MOMENT DE LA DÉCOUVERTE  
DES PARADOXES DE L'INFINI AU  
DÉBUT DU XX<sup>e</sup> SIÈCLE, UN  
SENTIMENT DE «CRISE  
FONDAMENTALE»  
EST NÉ.

CETTE FOIS,  
CELA FAIT PARTIE  
DU PROGRÈS; ET,  
DANS CE SENS, ELLE  
REFLÈTE LA CONTINUITÉ  
DU CHANGEMENT DE  
NOTRE PERCEPTION  
DE LA NATURE DES  
MATHÉMATIQUES.



# LA TOPOLOGIE


La puissance des ordinateurs agit sur les mathématiques d'autres façons plus significatives. Les ordinateurs ont fourni des preuves là où le cerveau humain n'était pas suffisant. Le cas le plus marquant est l'avènement de la topologie. Il s'agit d'une discipline qui étudie les rapports entre structures, indépendamment de leurs formes précises. On peut également évoquer le champ mathématique le plus simple, s'agissant de formuler les problèmes, mais aussi le plus difficile, s'agissant d'y trouver des solutions.

L'un des plus beaux défis s'appelle le théorème des quatre couleurs, qui énonce que n'importe quelle carte peut être dressée avec au maximum quatre couleurs. La seule règle est que deux pays ayant une frontière commune ne peuvent pas avoir la même couleur.

Si la « rencontre » se fait en un seul point, c'est admis, autrement, la carte peut avoir la forme d'un « camembert » avec autant de segments que l'on désire et donc autant de couleurs. La seule limite est que chaque « pays » est un territoire uni et ne peut héberger une « île » (comme l'exemple de l'Italie et de la Suisse près de Lugano).



N'IMPORTE  
QUI PEUT TENTER  
L'EXPERIENCE AVEC DES  
TERRITOIRES MORCELÉES, AUX  
FRONTIÈRES BISCORNUES...  
ET VÉRIFIER QU'AVEC QUATRE  
COULEURS, ON PARVIENT  
À COLORIER TOUTE  
LA CARTE!



LES MATHÉMATICIENS QUI  
ONT EXPLORÉ LE THÉORÈME DES  
QUATRE COULEURS ONT DÉCOUVERT  
QUE LA FORME DU MONDE EST  
IMPORTANTE.

SI L'ON  
UTILISE UN TORE,  
IL EST RELATIVEMENT  
FACILE DE DÉMONTER  
QU'AVEC CINQ  
COULEURS, ON PEUT  
RÉUSSIR.

MAIS  
IL Y A QUELQUE  
CHOSE D'INOPÉRANT  
QUAND IL S'AGIT D'UNE  
SPHÈRE OU D'UN  
PLAN.

Finalement, une preuve a été avancée en 1976, mais elle a demandé une étude approfondie de plus de mille cas, une tâche qui dépassait de loin la capacité des Hommes. Pour ce faire donc, un programme pour ordinateur a été spécialement mis au point afin de tester chaque cas, l'un après l'autre : cela a marché et a donné le résultat espéré.

Mais d'autres mathématiciens se sont plaints que cette preuve ne pouvait pas être validée. La raison en est qu'un programme d'ordinateur n'est jamais qu'une liste d'instructions successives et non une séquence d'affirmations logiques entre elles. Comment pouvons-nous alors savoir qu'un programme en particulier (à la différence d'autres) a été débogué totalement ? À la fin, une sorte de consensus s'est imposé et la preuve est aujourd'hui acceptée comme « vérifiée ».

# LA THÉORIE DES NOMBRES

Comme pour la topologie, les problèmes de la théorie des nombres sont faciles à décrire mais difficiles à résoudre.



Apporter la preuve de cette affirmation pour tous les nombres pairs est plutôt difficile.

D'ailleurs, cela a longtemps représenté un défi pour les mathématiciens.

La première tentative couronnée de succès porte le nom de « conjecture de Goldbach » ; elle a démontré que pas plus de 400 000 nombres premiers sont nécessaires.



Le plus célèbre des théorèmes dans le domaine des nombres est celui que nous devons au mathématicien français **Pierre de Fermat** (1601–1665).



CELA  
M'EST VENU  
EN RÉFLÉCHISSANT  
À L'UN DES PLUS  
ANCIENS RAPPORTS  
MATHÉMATIQUES, CELUI  
DU THÉORÈME DE  
PYTHAGORE, ÉNONÇANT  
QU'IL Y A UN INFINI  
DE SOLUTIONS À  
L'ÉQUATION

$$a^2 + b^2 = c^2$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des nombres entiers. La construction de tels triplets est connue depuis des siècles.

Nous avons déjà vu que les mathématiciens arabes avaient réfléchi à la même équation avec des puissances plus élevées; certains ont essayé de vérifier l'impossibilité de trouver une solution en nombres entiers à :

$$x^3 + y^3 = z^3$$

Mais Pierre de Fermat pensait y être parvenu, affirmant que pour l'équation...

$$x^n + y^n = z^n$$

il n'existait aucune solution de nombres premiers pour  $n$  supérieur à 2.

Il a même écrit à un ami qu'il avait une « jolie petite preuve » qui ne tenait pas dans l'étroite marge de sa feuille! C'est ainsi qu'a commencé la course, qui s'est poursuivie trois siècles durant jusqu'à la preuve proposée par le mathématicien britannique **Andrew Wiles** (1953–), enseignant aujourd'hui à Princeton.



MA PREUVE  
IMPLIQUE DE NOMBREUX  
NIVEAUX ABSCONS DE  
MATHÉMATIQUES ET IL FAUT  
PLUSIEURS MILLIERS DE  
LIGNES DE DÉMONSTRATION  
ET DES CENTAINES DE  
CALCULS ET DE LIENS  
LOGIQUES.

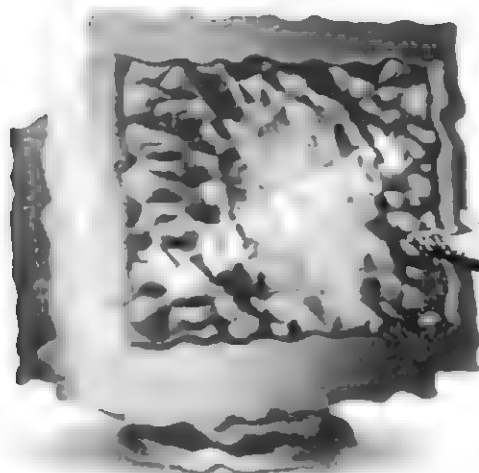
Mais démonstration est faite que l'esprit humain arrive encore à résoudre des problèmes là où les ordinateurs échouent!



Il s'avère que la théorie des nombres, traditionnellement, a été l'une des branches les moins « applicables » des mathématiques. Mais avec les progrès enregistrés dans certains champs, on voit parfois des interactions étonnantes.

**LA CRYPTOGRAPHIE  
(SCIENCE VOIRE ART DE  
CRÉER DES MESSAGES CODÉS)  
A TOUJOURS INTÉRESSÉ  
LES MILITAIRES ET LES  
ESPIONS.**

Mais, avec le besoin croissant de pouvoir transmettre et de recevoir ces messages sûrs *via* Internet, ce secteur a soudain revêtu une grande importance commerciale, technologique et politique. La « sécurité » des échanges dépend totalement de la difficulté de craquer (déchiffrer) les codes de cryptage.



**IL FAUT  
FAIRE QUELQUE  
CHOSE.**

Le meilleur moyen de créer un bon codage est de passer par de très grands nombres, tels que leur « construction » ne soit pas facile à calculer. La définition de tels nombres et leur construction-déconstruction font appel à la théorie des nombres et à celle des groupes. Et c'est ainsi que la plus abstraite des disciplines mathématiques se trouve aux avant-postes des applications. Dans la mesure où les gouvernements sont très attentifs à la capacité de leurs services à intercepter et à déchiffrer des messages émanant potentiellement de criminels et/ou de terroristes, le problème du « chiffre » est devenu aussi hautement politique.



# LES STATISTIQUES

Le domaine où les mathématiques ont le plus d'impact sur la vie de tous les jours est celui des statistiques. Le terme « statistique » lui-même signifie « connaissance de l'état », dans la mesure où nos gouvernants se sont rendu compte qu'ils seraient bien plus efficaces s'ils disposaient d'informations sur ce qui se passe réellement. Mais, amasser d'énormes masses de nombres ne suffit évidemment pas ; ces nombres doivent être « agrégés » et synthétisés pour être utiles aux décideurs.

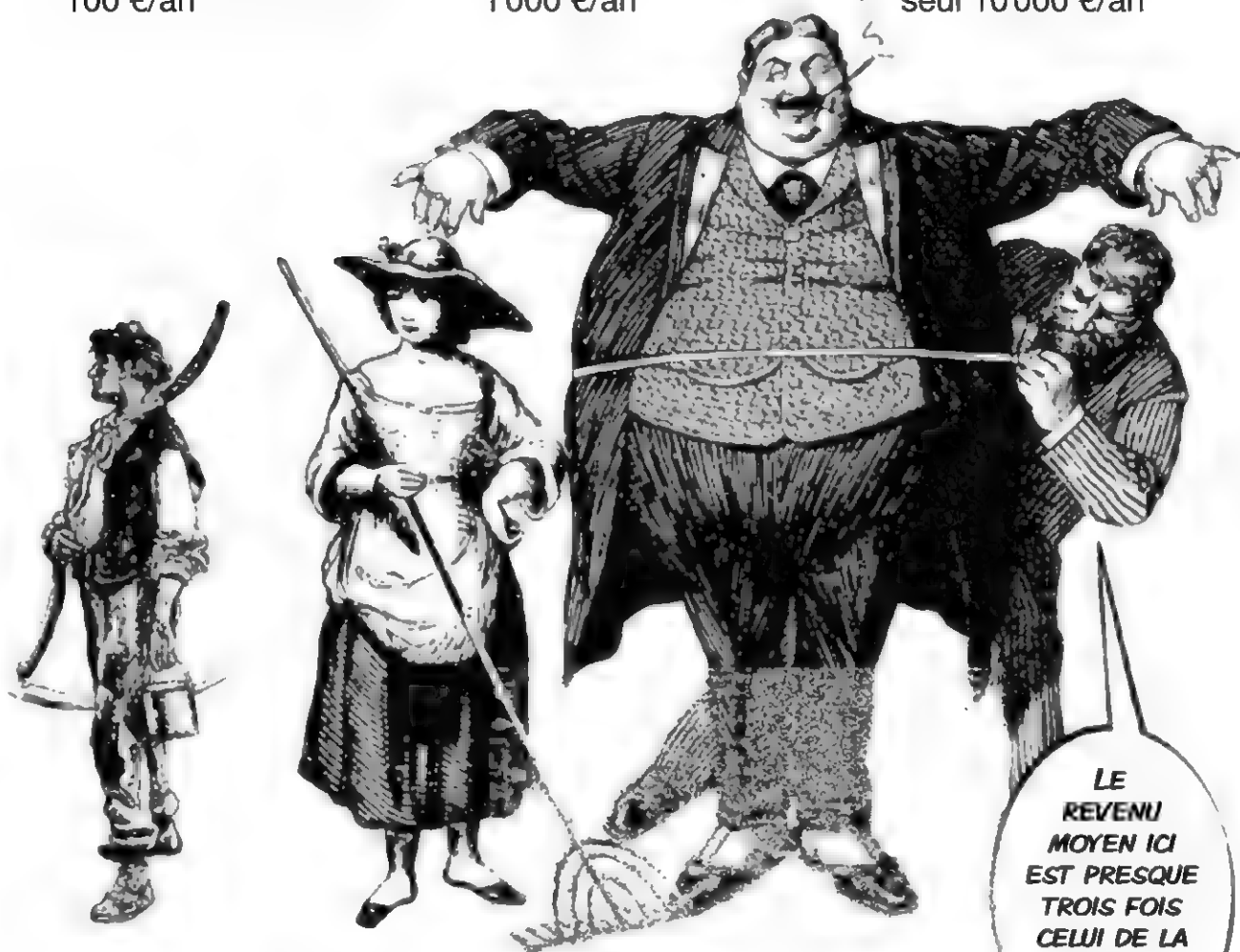
Dans ce travail, on se sert des mesures statistiques pour établir des « moyennes ». Cependant, une moyenne n'est jamais qu'une représentation d'un groupe et, tout en révélant et en clarifiant une situation donnée, ces valeurs moyennées peuvent aussi servir à masquer, voire à effacer une réalité.

Pour illustrer notre propos, imaginons un village où

100 paysans  
gagnent péniblement  
100 €/an

10 agriculteurs  
gagnent facilement  
1 000 €/an

et un propriétaire  
terrien amasse tout  
seul 10 000 €/an



Le revenu global annuel du village est donc de 30 000 €, ce qui, divisé par les 111 foyers fiscaux, donne une moyenne modeste de 270 €/an.

Et si au lieu de la valeur moyenne, nous pouvions nous focaliser sur la valeur « médiane » (où seuls 50 % dépassent cette valeur) ou sur la valeur « modale » (le revenu détenu par la majorité)... Dans ces deux calculs, nous aurions le même résultat, à savoir 100 €, valeur qui ne tient pas compte des plus fortunés du village. Aussi, pour avoir une meilleure « image » de la distribution des revenus du village, nous pourrions citer les déciles les plus hauts et les plus bas (aux niveaux 10 % et 90 %); le 11<sup>e</sup> foyer (en partant du haut) serait ainsi inclus dans le compte, c'est-à-dire possédant un revenu moyen.

**MAIS MÊME AVEC CES RAFFINEMENTS DE CALCUL, ON NE TROUVERA NULLE PART DANS CES STATISTIQUES DE REVENUS DES FOYERS, LES ACTIVITÉS COMMERCIALES DE LA MULTINATIONALE AGROALIMENTAIRE QUI VEND TOUTE LA SEMENCE AU VILLAGE ET QUI LUI ACHÈTE TOUTE SA RÉCOLTE.**

**ILS NE TE LAISSENT QUE LA PEAU ET LES OS!**

Ce dernier exemple nous rappelle qu'il n'existe pas de représentation totalement objective, neutre et statistique des choses. On peut même avancer qu'il est facile de mentir au moyen de statistiques.

**COMME EXEMPLES DE PRÉSENTATIONS VOLONTAIREMENT TROMPEUSES, CITONS LES GRAPHIQUES OÙ NE FIGURENT NI ABSCISSE, NI ÉCHELLE ET DES IMAGES OÙ UNE AUGMENTATION DE 50% EN VOLUME DONNE L'IMPRESSION D'UN QUADRUPLEME DE VOLUME.**

**MAIS CELA NE VEUT PAS DIRE QUE TOUT CALCUL STATISTIQUE N'EST QUE LE RÉSULTAT DE PRÉJUDICES, DE VILS CAPRICES OU DE CORRUPTION!**

# LES VALEURS-P ET LES VALEURS HORS ÉCHELLE

Dans tous les tests statistiques de vraisemblance, un nombre désigne ce que l'on appelle « la limite de confiance », autrement dit la « valeur-p » des calculs. Ce nombre peut être de 5 % ou de 1 % (ou autre, disons 95 % ou 99 %). *Grosso modo*, la valeur-p indique le degré de confiance (ou non) qu'il convient d'accorder aux valeurs obtenues par le test. Il exprime par un rapport {20 contre 1 ou 100 contre 1 (100 %)} les chances que le test ait donné un résultat faux vrai. Aucun test ne donne de résultats 100 % certains ou parfaits ! Plus haute est la certitude requise, plus le test va coûter cher à mettre en œuvre. Ainsi, ceux qui fixent les normes relatives à un champ d'application donné auront au préalable décidé quel est le niveau de risque acceptable associé à toute erreur possible.




DANS UN  
EXEMPLE CLASSIQUE,  
L'ÉCHANTILLONNAGE DE  
POMMES, ON SAIT QU'UNE  
SEULE POMME POURRIE  
PEUT CONTAMINER UN  
LOT ENTIER...

... CE  
QUI EST TRÈS  
DIFFÉRENT D'UN CAS  
D'AMORCES MILITAIRES,  
OÙ ON SAIT QU'UNE AMORCE  
DÉFECTUEUSE PEUT EMPORTER  
TOUTE LA CARGAISON EN CAS  
D'ACCIDENT D'ALLUMAGE  
INTEMPESTIF.

Il y a un revers à l'utilisation des valeurs-p – conçues pour limiter des possibilités d'annoncer des résultats positifs faux. Si une valeur-p déterminée de façon plus rigoureuse rend le test plus « sélectif », du même coup, il le rend moins « sensible ». Si, par exemple, notre test vise le niveau de toxicité d'un polluant environnemental, une valeur-p de 95 % peut nous protéger des fausses alertes, mais cela nous laisse vulnérables à une attitude de complaisance mal inspirée. Ainsi, un test de signification statistique apparemment « objectif » comporte implicitement le devoir « d'apporter la preuve » : à savoir, le produit doit-il être considéré comme « sûr », tant que l'on n'a pas prouvé son éventuelle toxicité, ou doit-on prendre le test comme une alerte prémonitoire, donc valable. Dans chaque cas, on voit ici la mise en pratique du « principe de précaution ». Et la question à laquelle nous n'échapperons pas est : « Au nom de qui le principe de précaution est-il invoqué ? »

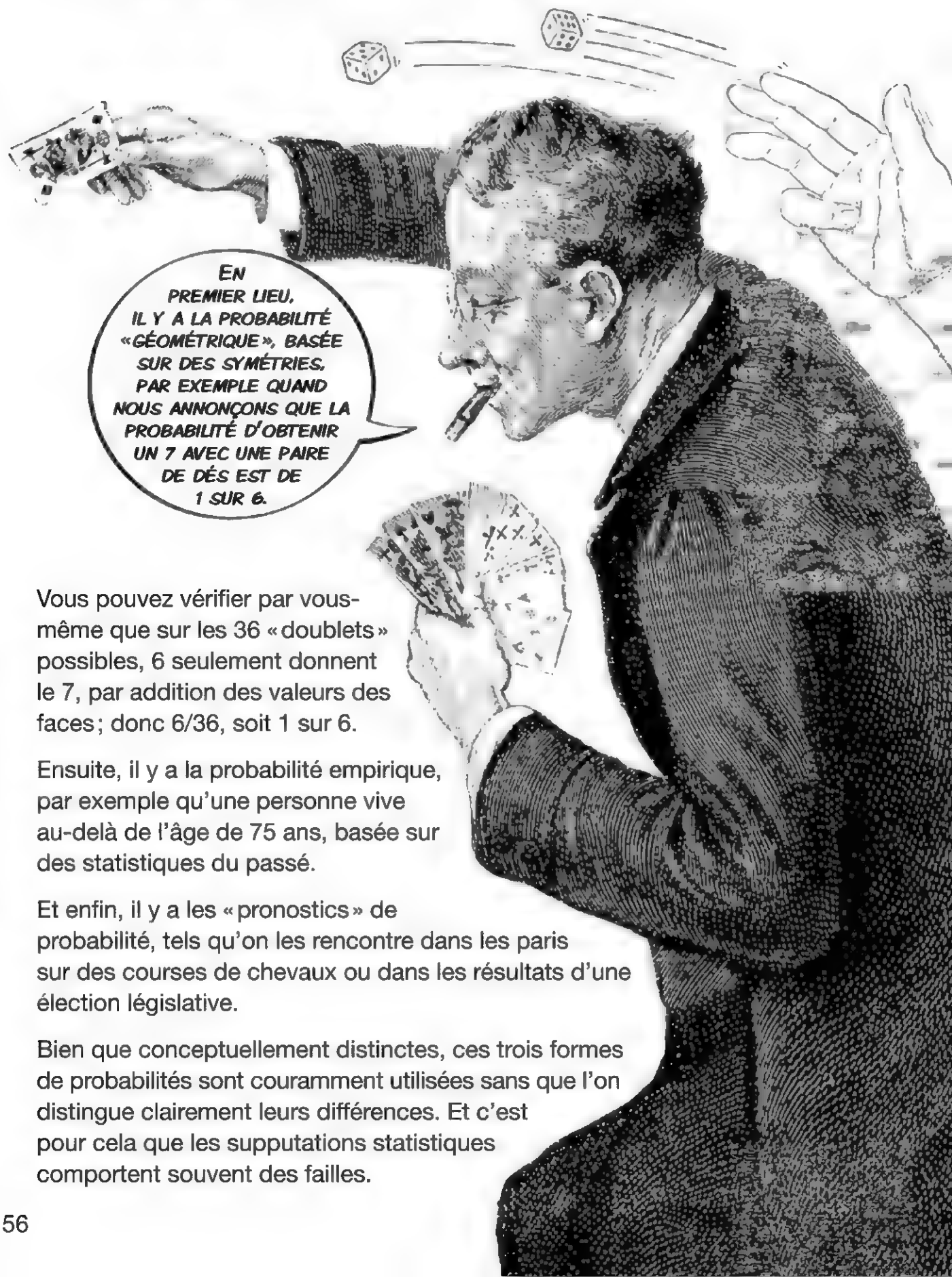
Même pour les utilisations les plus simples des statistiques, par exemple pour monter des données expérimentales, des a priori et des jugements de valeur sont inévitables. Les données recueillies ne « collent » pas toutes au trait que l'on veut faire passer par les points du graphique. Et quand ils en sont trop proches, on peut soupçonner un indice de « fabrication » frauduleuse. Certains points se trouvent assez loin de la « foule » – on les appelle les « hors échelle ». Si l'on intègre ces valeurs au calcul en cours, ce dernier pourrait subir un biais délétère. Mais, d'un autre côté, les rejeter d'office signifie qu'on leur prête un degré d'erreur... avec pour conséquence que l'on pourrait ainsi éliminer des données importantes, voire cruciales.



**LES PREMIERS  
SIGNES D'UN TROU DANS LA  
COUCHE D'OZONE DE LA TERRE  
AU-DESSUS DU PÔLE SUD ONT ÉTÉ  
NÉGLIGÉS QUELQUES ANNÉES DURANT.  
PLUS TARD, ON S'EST APERÇU QUE  
LE PROGRAMME DE STATISTIQUES DE  
L'ORDINATEUR LES AVAIT « FILTRÉS »,  
CONSIDÉRANT QUE CES VALEURS  
ÉTAIENT « HORS ÉCHELLE ».**

# LES PROBABILITÉS

Les techniques que l'on emploie pour traiter des données statistiques sont basées pour la plupart sur la théorie des probabilités. Celle-là fait appel à trois concepts assez distincts, d'ailleurs trop souvent confondus.



EN  
PREMIER LIEU,  
IL Y A LA PROBABILITÉ  
«GÉOMÉTRIQUE», BASÉE  
SUR DES SYMÉTRIES,  
PAR EXEMPLE QUAND  
NOUS ANNONÇONS QUE LA  
PROBABILITÉ D'OBTENIR  
UN 7 AVEC UNE PAIRE  
DE DÉS EST DE  
1 SUR 6.

Vous pouvez vérifier par vous-même que sur les 36 «doublets» possibles, 6 seulement donnent le 7, par addition des valeurs des faces; donc  $6/36$ , soit 1 sur 6.

Ensuite, il y a la probabilité empirique, par exemple qu'une personne vive au-delà de l'âge de 75 ans, basée sur des statistiques du passé.

Et enfin, il y a les «pronostics» de probabilité, tels qu'on les rencontre dans les paris sur des courses de chevaux ou dans les résultats d'une élection législative.

Bien que conceptuellement distinctes, ces trois formes de probabilités sont couramment utilisées sans que l'on distingue clairement leurs différences. Et c'est pour cela que les supputations statistiques comportent souvent des failles.



Supposez quelqu'un dit à son amie :



Elle jette une fois de plus la pièce, qui tombe encore sur «face».



Soudain l'amie est perplexe. Elle sait pertinemment que pour une pièce non truquée, les «faces» ont la même probabilité géométrique que les «piles» de sortir. Et c'est pour cette raison «qu'à la longue», une pièce non truquée va tomber sur «face» autant de fois que sur «pile». La preuve sera apportée ici de manière empirique. Mais en partant de ces deux seules généralités, il serait hasardeux de juger si une pièce est truquée ou non.



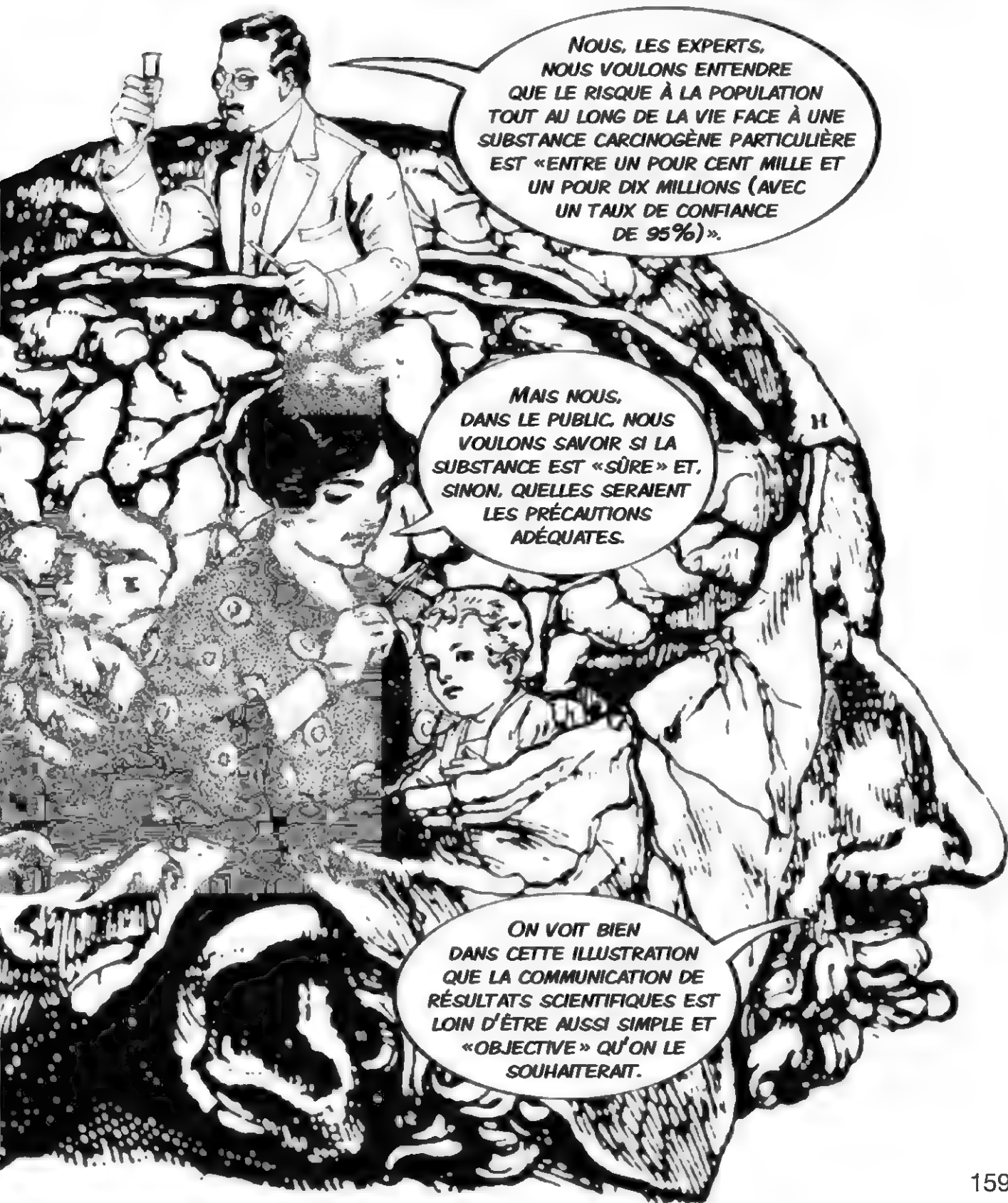
Les jugements pour savoir si une pièce donnée est oui ou non truquée demandent une application des lois de probabilité et des statistiques. La conception expérimentale du test va incorporer les suppositions quant au comportement de la pièce à chaque jet, ainsi que des évaluations d'erreurs et la mise en place de limites de confiance pour en arriver aux jugements finals. Cet épiphénomène de jet d'une pièce entre copines, une fois clarifié, va nous entraîner vers des problèmes autrement plus sérieux. Tandis que la forme directe de la question est un simple constat sur les probabilités d'événements (Pile ou face ? La probabilité est égale pour une pièce non truquée), son inverse (Cette pièce est-elle truquée ?) implique des jugements basés sur des sciences statistiques.

Dès lors que les arguments s'emmêlent les pinceaux avec des questions de causalité, on va trouver des pièges partout. Voici l'histoire d'un homme qui ne voulait pas prendre l'avion...



# L'INCERTITUDE

Ceux qui ont à fournir des chiffres, soit aux décideurs soit auprès du public, font face à un dilemme assez cruel. S'ils expliquent les incertitudes et expriment des réserves quant à certains chiffrages, le résultat final peut se révéler incompréhensible. D'un autre côté, s'ils simplifient, en ne donnant qu'un nombre magique (souvent un pour un million) pour répondre à des questions de sécurité, ils encourent le risque d'être traités de trop simplistes, trop approximatifs.

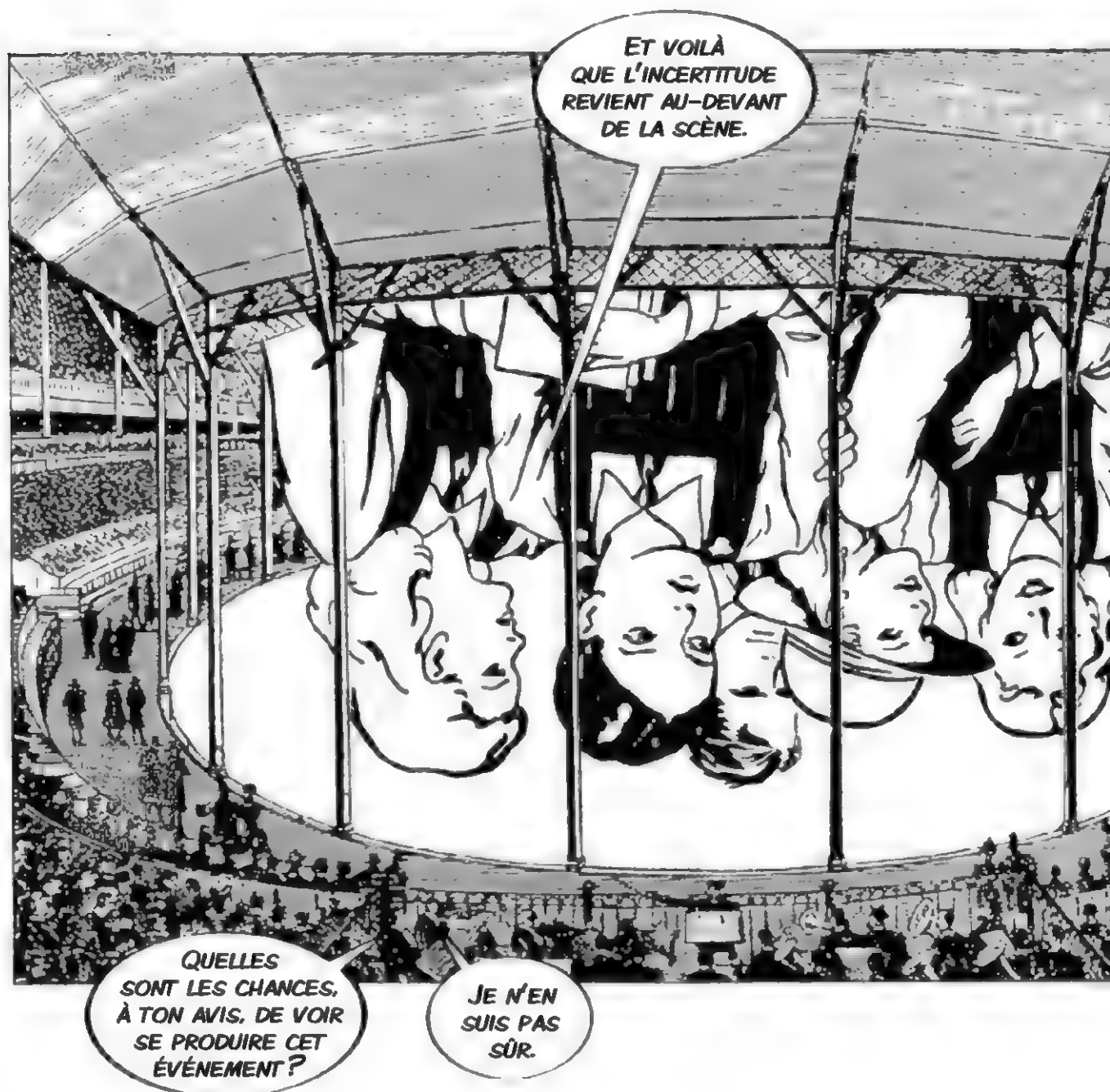


NOUS, LES EXPERTS,  
NOUS VOULONS ENTENDRE  
QUE LE RISQUE À LA POPULATION  
TOUT AU LONG DE LA VIE FACE À UNE  
SUBSTANCE CARCINOGENE PARTICULIERE  
EST «ENTRE UN POUR CENT MILLE ET  
UN POUR DIX MILLIONS (AVEC  
UN TAUX DE CONFIANCE  
DE 95%)».

MAIS NOUS,  
DANS LE PUBLIC, NOUS  
VOULONS SAVOIR SI LA  
SUBSTANCE EST «SÛRE» ET,  
SINON, QUELLES SERAIENT  
LES PRÉCAUTIONS  
ADÉQUATES.

ON VOIT BIEN  
DANS CETTE ILLUSTRATION  
QUE LA COMMUNICATION DE  
RÉSULTATS SCIENTIFIQUES EST  
LOIN D'ÊTRE AUSSI SIMPLE ET  
«OBJECTIVE» QU'ON LE  
SOUHAITERAIT.

Le grand défi auquel font face les mathématiciens sur le front social est la gestion de facteurs d'incertitude. Longtemps, on a cru que le progrès de la science dite naturelle repousserait les limites de l'ignorance en bannissant l'incertitude – et que ce qui resterait serait dompté par la théorie des probabilités.



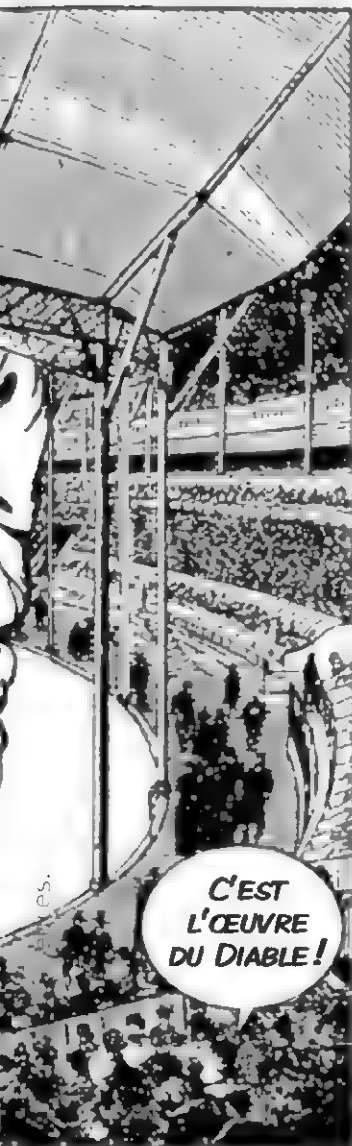
L'incertitude a conquis les mathématiques depuis leur base et se trouve à présent au cœur de la théorie quantique de la physique moderne.

Nous sommes bien obligés, dorénavant, de constater les effets de notre civilisation industrielle sur son environnement naturel, à la fois complexe et imprévisible. Il n'est donc pas surprenant de voir naître de nouveaux champs de mathématiques ayant pour nom «la théorie du chaos» ou «la prévision des catastrophes».

# LES NOMBRES «POLITIQUEMENT CORRECTS»

Notre compréhension des nombres – conçus comme ils étaient pour compter et pour effectuer des calculs – n'est pas toujours pertinente quand on aborde leur utilisation en politique. Cela demande des concepts bien différents et d'autres compétences. Et, étant donné notre longue tradition de considérer les mathématiques comme quelque chose de précis et de vrai, nous avons

tendance à oublier que l'incertitude fait partie intégrante du monde des nombres à usage «politiques». Trop de précisions dans les informations relayées par les médias et dans les communiqués officiels entourent de mystère le facteur d'incertitude. Si, par exemple, une quantité est composée de deux chiffres, disons 47, cela signifie que la valeur n'est ni 46, ni 48, ou qu'on la connaît à 2 % près.



C'EST  
L'ŒUVRE  
DU DIABLE!

ET SI 47 EST  
DONNÉ COMME UNE  
VALEUR «SÛRE», CALCULÉ À  
PARTIR DE TOUTES SORTES DE  
DONNÉES AVEC TOUTES SORTES  
D'INTERPRÉTATIONS, QUELLES  
SONT DONC LES CHANCES QU'IL  
SOIT CONNU RÉELLEMENT  
À 2% PRÈS?

TROP DE  
PRÉCISIONS  
PEUVENT NOUS ÉGARER  
ET GÉNÉRER DE LA  
CONFUSION; RÉSULTAT :  
LES UTILISATEURS ET LES  
FOURNISSEURS EN  
SOUFFRENT.

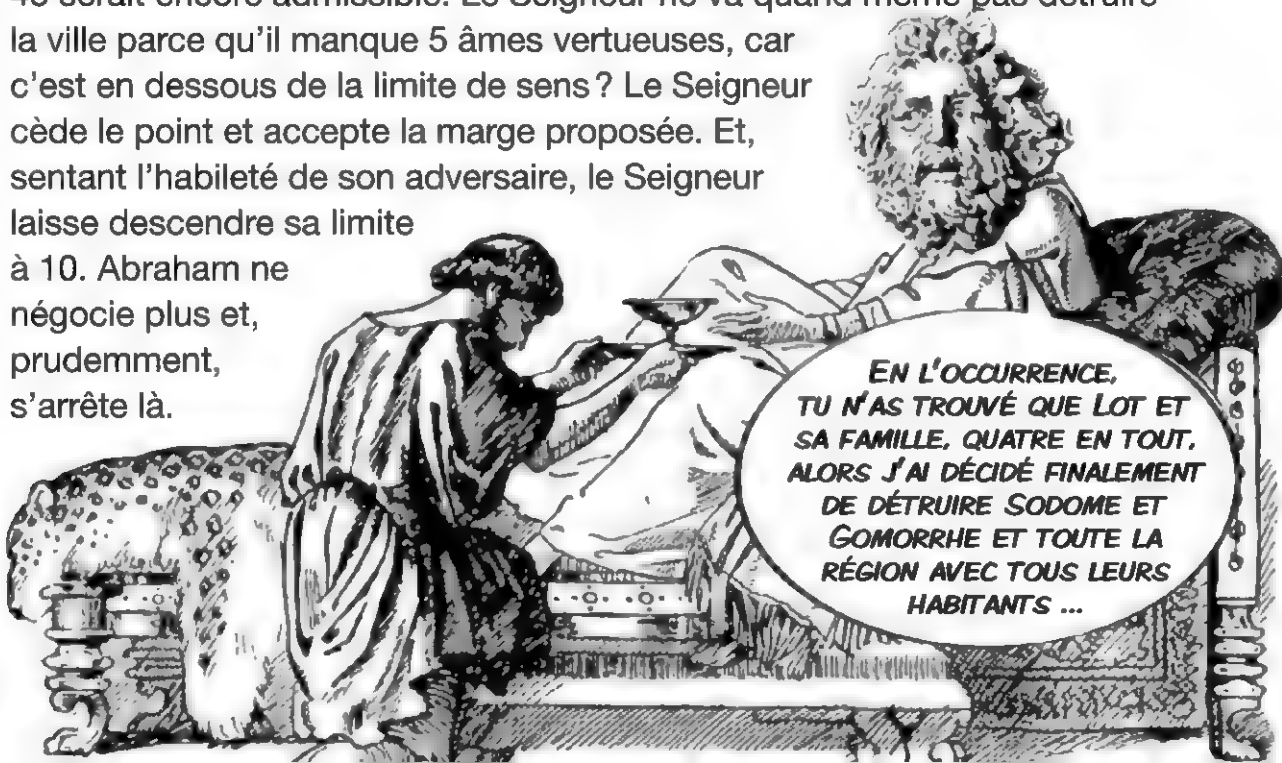




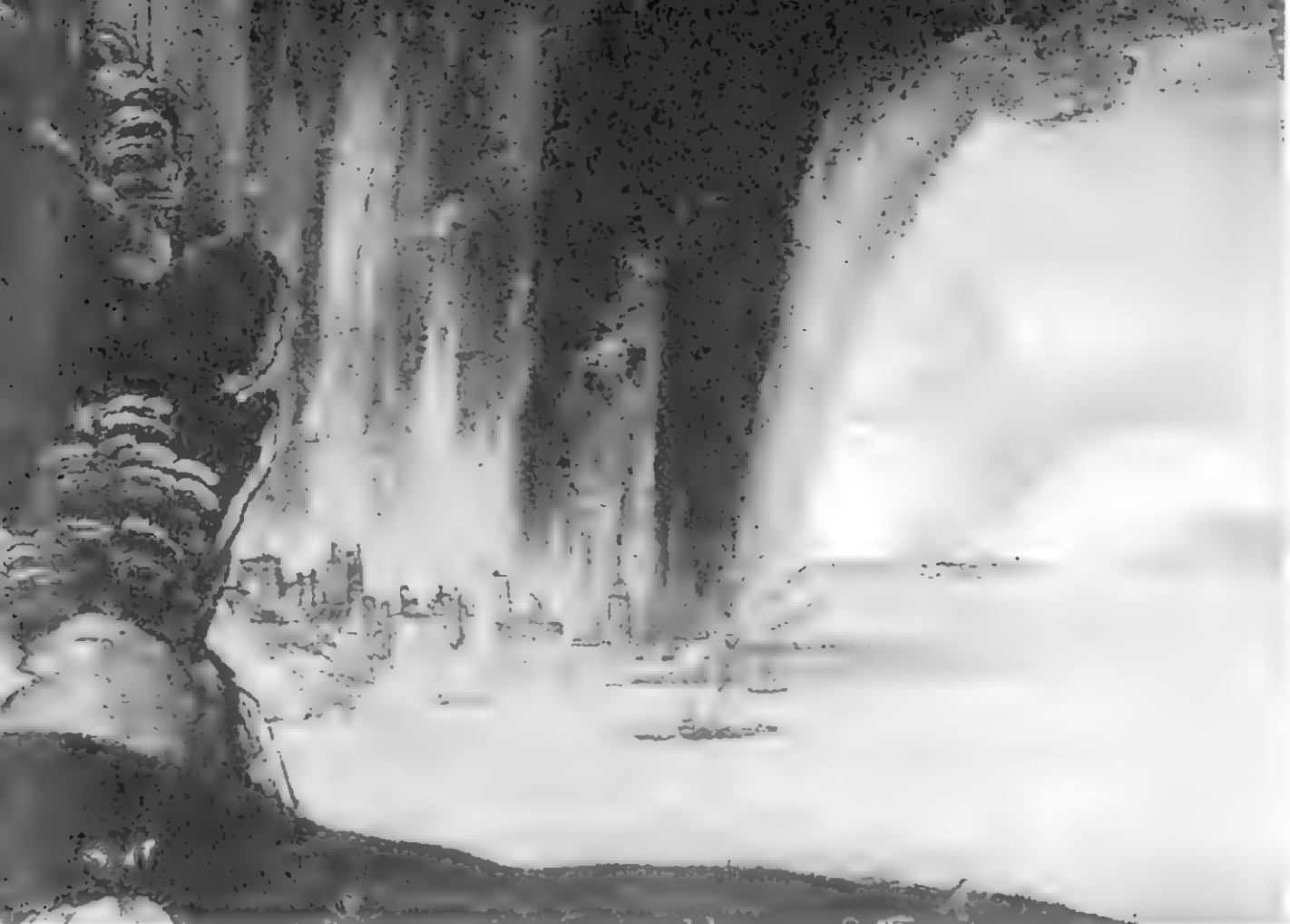
Le sens des nombres en politique dépend beaucoup du contexte. Citons, pour illustrer ce point, l'échange que nous avons noté dans la Bible (Genèse 18), quand Abraham et Dieu se tiennent devant les villes de Sodome et Gomorrhe. Dieu parle ainsi :



Ainsi Abraham revoit son argumentation. Il ne parle plus de politique (épargner la ville si l'on peut y trouver quelques âmes vertueuses) mais d'implémentation (que faire si nous sommes juste en dessous de la limite annoncée ?). Dans le contexte biblique, 50 n'est pas un compte juste mais un **comptage politique**, avec une marge. Abraham défend l'idée que 45 serait encore admissible. Le Seigneur ne va quand même pas détruire la ville parce qu'il manque 5 âmes vertueuses, car c'est en dessous de la limite de sens ? Le Seigneur cède le point et accepte la marge proposée. Et, sentant l'habileté de son adversaire, le Seigneur laisse descendre sa limite à 10. Abraham ne négocie plus et, prudemment, s'arrête là.







Cette histoire du «sauvetage de Sodome» démontre à quel point des nombres peuvent avoir des sens très différents dans une argumentation. 50 était l'estimation initiale et 5 la marge (c'est-à-dire qu'avec 45 Dieu ne détruirait pas la ville). La différence entre 4 et 50 dépend du contexte. Parfois la différence est significative (hors limite) et parfois non. Bien que notre exemple traite d'un nombre à valeur politique, la question du sens à y accorder dépend du contexte et cela reste vérifiable pour toute estimation et toute mesure.

On voit apparaître le même phénomène dans ce que l'on appelle le paradoxe du «tailleur de clefs». Au départ, une personne dispose de la clef d'origine, qui marche bien avec la serrure, puis d'autres personnes en font ensuite des copies. À chaque copie, la forme est exacte (dans les limites que tolère la machine), mais après de multiples copiages, les clefs ne marchent plus, parce que l'accumulation des marges d'erreur dépasse la tolérance du barillet d'origine. Pour connaître cette dimension critique, nous aurons (en termes de mesure) :  $A = B = C = \dots K$ . Mais A n'est pas identique à K. En termes arithmétiques ordinaires, cela n'a pas de sens. Néanmoins le processus explique comment les nombres, dans des estimations et des mesures, ont un sens précis uniquement dans un contexte donné, qui n'est pas le même que lorsque l'on fait du simple comptage.



# LES MATHÉMATIQUES ET L'EUROCENTRISME

Les mathématiques européennes ont joué un rôle considérable dans la prise de conscience de l'Europe – de sa perception de posséder la plus grande richesse culturelle, l'unique monde de la culture véritable. Ceux qui ont vu dans les mathématiques la seule vraie valeur universelle et vertueuse trouvent difficile de croire que l'impérialisme et les mathématiques ont avancé main dans la main. Les mathématiques ont même servi à démontrer l'infériorité des cultures non occidentales.

**L'EUROPE  
A MIS EN ŒUVRE  
TROIS TACTIQUES POUR  
DISSÉMINER L'IDÉE  
D'EUROCENTRISME EN  
MATHÉMATIQUES.**

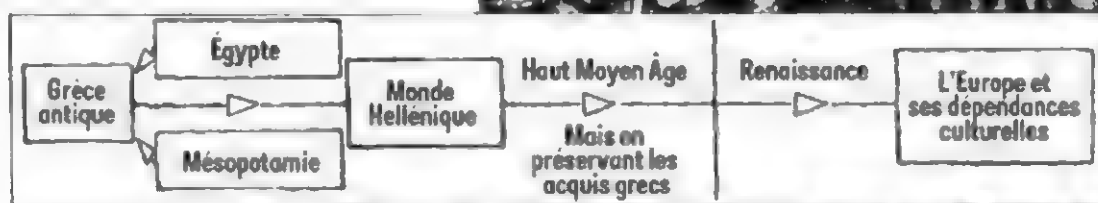
1. L'Europe s'est appropriée les contributions de cultures non occidentales, tout en les rendant « invisibles ». Il y a eu un vide historique avant le miracle de l'Antiquité grecque ; puis rien, absolument rien avant la Renaissance européenne du <sup>xvi</sup><sup>e</sup> siècle. En résumé, c'était là l'eurocentrisme classique.



2. L'Europe a défini les mathématiques d'une certaine manière, allant jusqu'à affirmer que nombre des contributions d'autres civilisations ne relevaient pas de « vraies connaissances mathématiques ». Les traditions mathématiques non européennes étaient considérées comme totalement empiriques et dictées par des besoins utilitaires. Ce n'était donc pas des mathématiques spéculatives au sens noble du terme.

**MAIS LES NATIONS ARABES ONT ÉTÉ ASSEZ GENTILLES POUR PRÉSERVER L'HÉRITAGE GREC MATHÉMATIQUE SPÉCULATIF ET L'ONT TRANSMIS, AMÉLIORÉ, À LEURS HÉRITIERS LÉGITIMES, LES MATHÉMATICIENS EUROPÉENS DE LA RENAISSANCE.**

C'est ce qui a été désigné comme la bande transporteuse ayant alimenté la théorie d'eurocentrisme.



3. Elle a légitimé le récit « traditionnel » du développement des mathématiques comme un produit exclusivement européen, et l'a même institutionnalisé sous la forme d'une éducation spécifique aux mathématiques.

**George Gheverghese Joseph** (1939-), historien anglo-asiatique des mathématiques.

**MÊME DE NOS JOURS, LES MATHÉMATIQUES SONT ENSEIGNÉES AVEC DES TERMES QUI REMONTENT À UNE IDÉOLOGIE IMPÉRIALISTE.**

**« C'EST CE PASSÉ IMPÉRIAL QUI A PRÉPARÉ LES ÉTUDIANTS À TROUVER IMPENSABLE QUE DES NON-EUROPÉENS PUISSENT ÊTRE CAPABLES DE PRODUIRE DES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES. IL A, DE PLUS, SOUTENU ET NOURRI LE MYTHE COMME QUOI LES MATHÉMATIQUES SERAIENT UN CADEAU 'CIVILISATEUR' FAIT AUX COLONIES, UNE ÉTINCELLE PROMÉTHÉENNE QUI CONDUIRAIT LES INDIGÈNES RETARDATAIRES À ASSIMILER LES SECRETS DES SCIENCES ET DES TECHNOLOGIES POUR ENTRER DE PLAIN-PIED DANS LE MODE MODERNE. »**



# LES ETHNO-MATHÉMATIQUES



Cette discipline cherche à établir un lien étroit entre mathématiques, culture et société, et sert à nous rappeler que le terme « mathématiques » couvre plus que les études théoriques de la tradition platonicienne. Nous voyons bien la variété, l'ingéniosité et la créativité qui ont présidé aux chemins par lesquels différentes personnes ont accompli et rendu intelligibles leurs travaux mathématiques.

LE PRÉFIXE  
«ETHNO» SE RÉFÈRE AU  
PEUPLE, DONC LES ETHNO-  
MATHÉMATIQUES DÉSIGNENT  
LES MATHÉMATIQUES DE TOUS  
LES PEUPLES EXCLUS DE LA  
CONNAISSANCE ET DE  
LA PRODUCTION  
CULTURELLE.

EN REVANCHE,  
ELLES INCLUENT LES  
TRADITIONS MATHÉMATIQUES  
DES CIVILISATIONS NON  
EUROPÉENNES, TELLES  
QU'ON LES RETROUVE EN  
INDE, EN CHINE ET DANS  
LA CULTURE ARABE...

... MAIS  
AUSSI DANS LES  
MATHÉMATIQUES ORALES  
D'ANCIENNES CULTURES  
TELLES QUE LES «STREET  
MATHEMATICS»  
DES VENDEURS AVEC  
LEUR TRICYCLE  
AU BRÉSIL...

...  
OU ENCORE  
LES MATHÉMATIQUES  
«FOLKLORIQUES» DES  
PEUPLADES D'AMÉRIQUE  
LATINE.

... LES  
TECHNIQUES DE  
COMPTAGE DES POSEURS  
DE MOQUETTE EN  
AMÉRIQUE...

... VOIRE DES  
MATHÉMATIQUES DU  
TRICOT PRATIQUÉES  
PAR DES EUROPÉENNES,  
VU SOUS UN ANGLE  
ALGÈBRE.

Ainsi, les pratiques ethno-mathématiques incluent non seulement les systèmes à symboles, mais aussi la conception spatiale, les techniques de construction, les mesures du temps et de l'espace, les différentes manières spécifiques de raisonner, d'analyser et d'inférer... et autres activités cognitives et matérielles.

UNE  
SECONDE, JE  
VOUS PRIE ! OÙ  
SONT LES FEMMES  
DANS TOUTE CETTE  
HISTOIRE ?

TOURNEZ LA  
PAGE... NOUS  
ALLONS VOIR ÇA  
ENSEMBLE...

## LES MATHÉMATIQUES ET LE GENRE

MALHEUREUSEMENT  
POUR NOTRE HÉRITAGE  
MATHÉMATIQUE, IL EST  
VRAI QUE CE DERNIER A ÉTÉ  
L'ŒUVRE D' «HOMMES  
BLANCS MORTS».

Les rares femmes qui, par le passé, ont été distinguées pour leurs travaux mathématiques sont des exceptions à la règle. L'une d'elles, la mathématicienne française **Sophie Germain** (1776–1831), a dû se faire passer pour un homme pour engager une correspondance suivie avec le mathématicien allemand **Karl Friedrich Gauss** (1777–1855).

MON SECRET  
A ÉTÉ TRAHİ QUAND  
LA GRANDE ARMÉE DE  
NAPOLEON A CAPTURÉ SA VILLE  
(GÖTTINGEN) ET J'AI DÛ USER  
DE MA CONDITION FÉMININE  
POUR LUI OBTENIR UN  
SAUF-CONDUIT.

QUAND LE  
COMMANDANT DES TROUPES  
FRANÇAISES M'A TRANSMIS LES  
SALUTATIONS DE MADEMOISELLE  
GERMAIN, J'AI ÉTÉ TRÈS ÉTONNÉ –  
JUSQUE-LÀ, JE PENSAIS QUE MA  
CORRESPONDANTE PARISIENNE  
ÉTAIT UN JEUNE  
HOMME.

On a avancé plusieurs causes (suggérées par des psychologues) pour expliquer la traditionnelle «infériorité» des femmes en mathématiques.

AUJOURD'HUI,  
EN RÈGLE GÉNÉRALE, LES  
FILLES S'EN SORTENT MIEUX QUE  
LES GARÇONS FACE AUX MÊMES  
EXERCICES MATHÉMATIQUES, SI BIEN  
QUE LE PROBLÈME EST MAINTENANT  
PLUTÔT D'ORDRE SOCIAL ET  
DEMANDE QUE L'ON S'Y PENCHE  
SÉRIEUSEMENT ET DE MANIÈRE  
URGENTE.





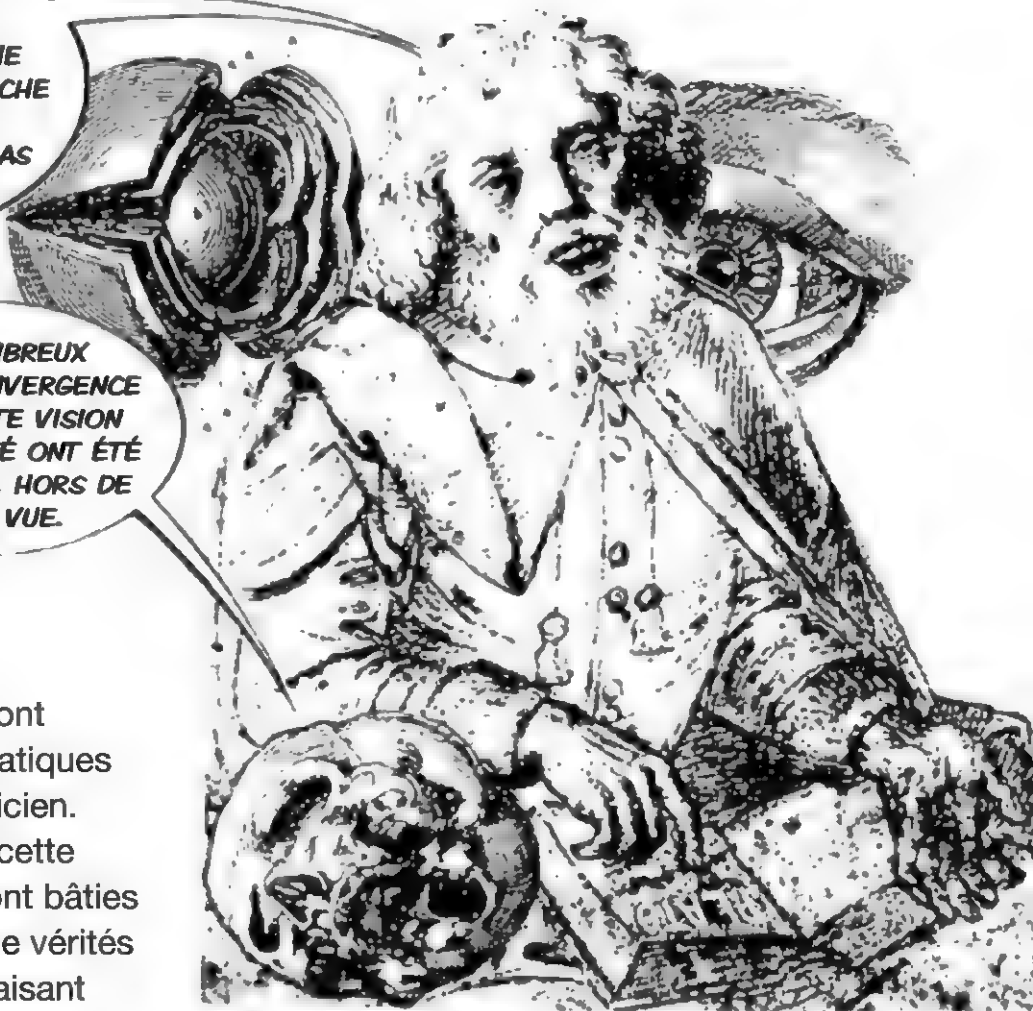
# ET MAINTENANT ? OÙ ALLONS-NOUS ?

Depuis plus de mille ans, la culture occidentale est dominée par une vision platonicienne des mathématiques.

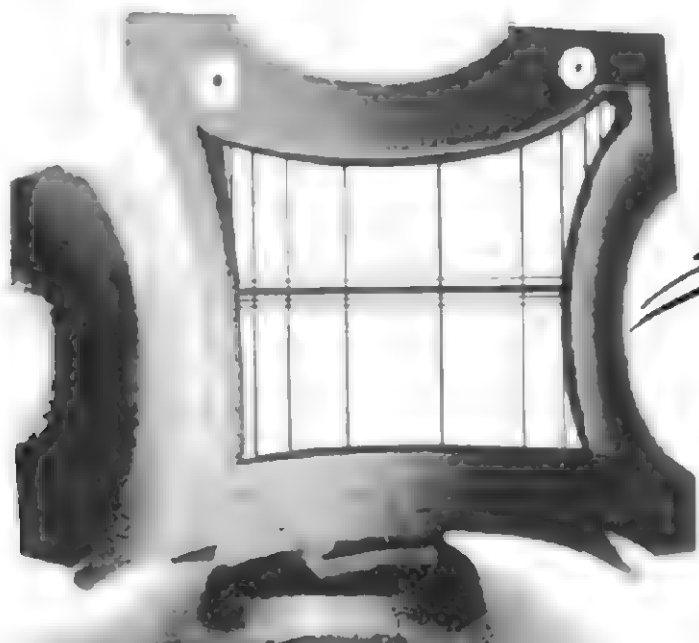
**C'EST UNE VISION  
DES CONNAISSANCES  
LIBÉRÉE DE TOUTE TÂCHE  
FASTIDIEUSE, QUI S'APPROCHE  
DE LA VÉRITÉ ET, DE  
SURCROÏT, NE SOUFFRE PAS  
DE CONTRADICTION.**

**LES NOMBREUX  
POINTS DE DIVERGENCE  
ENTRE CETTE VISION  
ET LA RÉALITÉ ONT ÉTÉ  
ESCAMOTÉS, HORS DE  
NOTRE VUE.**

Les philosophes, les enseignants et les vulgarisateurs, tous, ont présenté les mathématiques sous un angle platonicien. Les sciences – dans cette vision du monde – sont bâties sur les applications de vérités mathématiques. En faisant partie de cette image, les contributions des mathématiciens des cultures non occidentales ont été écartées, négligées ou déformées.

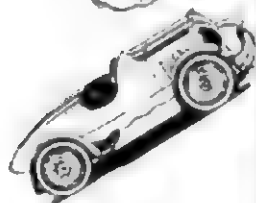


**BIEN QUE DES  
RECHERCHES EN  
MATHÉMATIQUES ANALYSANT  
LES BASES MÊMES DE CETTE  
DISCIPLINE AIENT DÉJÀ MIS À MAL  
LES CERTITUDES TRADITIONNELLES  
DE TOUTE PENSÉE MATHÉMATIQUE  
ORTHODOXE, CE SONT L'AVÈNEMENT  
ET LE DÉVELOPPEMENT  
D'ORDINATEURS QUI ONT CONDUIT À  
UNE SCIENCE DES MATHÉMATIQUES  
INFORMATISÉES «EMPIRIQUES» ET  
À SON INTÉGRATION DANS UNE  
NOUVELLE SYNTHÈSE AVEC LES  
APPROCHES ET PRATIQUES  
THÉORIQUES.**



En dépit de l'élargissement des connaissances, en général, de notre société moderne et industrielle, une compétence en calcul et une familiarité avec les chiffres restent l'apanage d'une élite culturelle et sociale.

DES POLITIQUES PRIMORDIALES SONT ENCORE PRÉSENTÉES EN TERMES DE «NOMBRES MAGIQUES», LES AUTEURS, POUR ÉVITER JUSTEMENT LES FOUDRES DE LA CRITIQUE, SE PROTÉGENT DERRIÈRE UN MUR DE CHIFFRES.



Philip Davis

EN RÉALITÉ, ILS CONTRIBUENT AINSI À INHIBER LA TENUE DE DÉBATS OUVERTS ET SAINS QUI SONT NÉCESSAIRES SI NOUS VOULONS RÉSOUDRE CERTAINES CONTRADICTIONS DESTRUCTRICES DE LA CIVILISATION INDUSTRIELLE QUI EST LA NÔTRE.



Reuben Hersh

IL N'EXISTE GUÈRE DE SECTEURS QUE LES MATHÉMATIQUES N'ONT PAS ENVAHIS (OU DE SECTEURS QUI POURRAIENT L'ÊTRE). TOUT COMME IL EST VRAI QUE LES OBJETS MATÉRIELS – OÙ QU'ILS SE SITUENT SUR TERRE – SUBISSENT LA LOI DE LA GRAVITÉ, LES MATHÉMATIQUES – AYANT CETTE CAPACITÉ D'ANALYSER LES QUANTITÉS, L'ESPACE, LES SCHÉMAS, LES ASSEMBLAGES STRUCTURELS, LES IMPLICATIONS LOGIQUES – SONT DEVENUES CE QUE VOULAIT DESCARTES, À SAVOIR «LA GLU» QUI UNIFIERAIT UN MONDE SUPPOSÉ TOTALEMENT RATIONNEL.

JADIS, LES IDÉES D'INTENTION, DE BUT, D'HARMONIE IMPOSAIENT AUX SCIENCES UNE RÉALITÉ QUI PRENAIT SA SOURCE DANS LES VALEURS HUMAINES. À L'INVERSE, AUJOURD'HUI, LA SCIENCE AU SENS LARGE, AVEC SES FORMULES MATHÉMATIQUES ABSTRAITES, A IMPOSÉ SA RÉALITÉ SUR CES VALEURS ET SUR LE COMPORTEMENT DES HOMMES.

Dans ces conditions, il est essentiel que nous sachions et que nous apprécions ce que l'on appelle les faillites manifestes des mathématiques (avec une démarche scientifique), afin de surmonter les incertitudes du monde réel qui nous entoure. Il faut que nous réfléchissions à nouveau à ce qu'est la vraie connaissance et à ce dont elle est capable.

Les mathématiques font face à de nouveaux défis. Et nous, les citoyens, avons un rôle à jouer. Pour reprendre la pensée et l'expression de de l'évêque Berkeley, chacun...

... DOIT SE  
SERVIR DE SON PROPRE  
JUGEMENT ET NE PAS  
S'AVEUGLER OU ENCORE  
MOINS S'ABAISSE, MÊME  
DEVANT LES MEILLEURS  
MATHÉMATIENS...



... s'agissant de problèmes auxquels nous sommes  
tous confrontés.

CONCEVOIR  
DE NOUVELLES  
FAÇONS DE VIVRE  
ET D'ACQUÉRIR DES  
CONNAISSANCES, ENTRE  
TOUS LES PEUPLES ET  
TOUTES LES CULTURES,  
VA DEMANDER DE  
L'INNOVATION AU NIVEAU  
DE NOS PRATIQUES  
SOCIALES ET  
SCIENTIFIQUES.

DANS CES  
DÉVELOPPEMENTS, LES  
MATHÉMATIQUES ENFIN LIBÉRÉES  
DE LEUR IMAGE EUROCENTRISTE  
ET PLATONICIENNE AURONT UN  
NOUVEAU RÔLE ET AMORCERONT  
UN NOUVEAU DÉPART HISTORIQUE  
VERS LE PROGRÈS, DE NOUVEAUX  
POUVOIRS AVEC, SANS DOUTE,  
L'APPARITION DE NOUVEAUX  
PARADOXES.





## LECTURES RECOMMANDÉES PAR LES AUTEURS

Les livres de vulgarisation sur les mathématiques semblent être en nombre croissant ces derniers temps, et il n'est pas possible parfois de choisir parmi eux de « bons textes », au vu de la masse d'ouvrages proposés. Alors, si vous recherchez un regard « humaniste » des mathématiques, vous préférerez, pour ses rapides détours historiques, philosophiques sans oublier les applications, *The Mathematical Experience and Descartes' Dream* de P. J. Davis et R. Hersh, publié chez Harvester, Brighton 1981, 1986; pour avoir accès à un monument du genre, il y a *Mathematics in Western Thought*, par M. Kiline (paru chez Penguin, Londres, 1972), à qui on doit la première synthèse systémique des conflits étouffés aux débuts de l'épopée mathématique, cf. son *Mathematics : The Loss of Certainty* (publié par Oxford University Press, Oxford & New York, 1980); et dans ses nombreux ouvrages, le professeur Ian Stewart décortique les méandres complexes des mathématiques, les rendant d'autant plus agréables à assimiler : notre suggestion est de démarrer par *Problems of Mathematics* (Oxford University Press, Oxford & New York, 1987) puis d'enchaîner avec *The Magical Maze* (Weidenfeld & Nicholson, Londres, 1998).

Dans son livre, *The Crest of the Peacock* (La crête du paon) paru chez Penguin, Londres, 1990, George G. Joseph révèle les « racines non-européennes des mathématiques »; Donald Hill nous offre une lecture agréable des mathématiques arabes dans *Islamic Science and Engineering* (paru chez Edinburghg University Press 1993); M. Ascher donne « point de vue multiculturel des idées mathématiques dans *Ethnomathematics* (chez Brooks/Cole Publishing, Pacific Grove 1990); M.P.Cross (ed.) se concentre sur *Native American Mathematics* (University of Texas Press, Auston 1986); et enfin Claudia Zaslavsky fait un effort pluridisciplinaire pur dissiper la Fear of Mathematics (Rutgers, New Jersey, USA 1994).

Simon Singh nous décrit de manière captivante comment le *Fermat's Last Theorem* a été résolu récemment; dans *The Number Sense* (Allen lane, Londoin 1997), S; Dehaene explore une approche neuro-psychologique à la pensée mathématique; David Berlinski invite le loectier à faire un *Tour of the Calculus* (Mandarin, London, 1996); Ziauddin Sardare et Iwona Abrams propose un guide relevé (dans la même série que celu-ci) *Introducing Chaos* (Icon Books, Cambridhge, 1998) et les lecteurs trouveront une approche très innovatrice du traitement des nombres en politique dans *Uncertainty and Quality in Science for Policy*, par S.O. Funtowicz et J.R.Ravetz (Kluwer, Dordrecht 1990). Et enfin dans *Mathematics for the Curious* (Oxfotrd University Press, Oxford & New York 1998) devrait satisfaire la curiosité de tout un chacun.



**Ziauddin Sardar** a fait un faux départ, démarrant une carrière de physicien avant de se raviser et passer au journalisme scientifique et aux reportages « télé », puis s'installer comme écrivain et critique (spécialisé en événements culturels). Il est bien connu sur le plan international pour ses exposés avec, entre autres publications, *Barbaric Others*, *Postmodernism and the Other* et *Cyberfutures* qu'il a coédité avec Jerry Rabetz. Il est l'auteur des guides sur *Mahomet*, les *Études culturelles* et le *Chaos*, parus dans la série *Introducing... d'Icon*.

**Jerry Rabetz** est un philosophe au sens large, avec un parcours hors normes et rare. Il a obtenu son doctorat (de mathématiques) à l'université de Cambridge ; il est membre du prestigieux groupe de travail *Production of a Public Understanding of Mathematics* et l'auteur de *Scientific Knowledge and its Social Problems*. Avant cela, il était enseignant dans le département d'Histoire et philosophie des sciences à l'université de Leeds, où il fut précurseur d'études sur le sujet « incertitude » et l'utilisation faite des nombres dans les sphères sociales et scientifiques.



## L'ILLUSTRATEUR

**Borin Van Loon.** Cet ouvrage sur les mathématiques est le 7<sup>e</sup> de ceux qu'il a illustrés dans la série *Introducing... (Aperçus)* ; on peut citer *Darwin* de Jonathan Miller, ou *Genetics* de Steve Jones, *Cultural Studies* de Zia Sardar, sans oublier *Buddha*, *Sociology* et *Ancient Eastern Philosophy*. Il s'est distingué comme auteur, « illustrateur » et peintre surréaliste pour une fresque dans le London Science Museum et ce qu'il appelle un flot de bandes dessinées de l'inconscient (depuis les réalités multiples des postulats de la physique quantique à l'art de beurrer les radis) qui sortent de ses oreilles finement ciselées si aristocratiques !



# INDEX

- Abaque **39, 62**  
 Achille **57**  
 Aire (fonction de) **107**  
 Aire **107**  
 Aleph **133, 134**  
 Algèbre **62, 71, 73, 77–81, 91**  
 Algèbre de  
     Boole **126–128**  
 Algèbre de l'infini **101**  
 Algorithmes **78**  
 Alphabet phénicien **20**  
 Analyse  
     combinatoire **80**  
 Analyse  
     indéterminée **65**  
 Analytique (géométrie)  
     **93, 96, 102**  
 Arabe ou Musulman **23**  
 Archimède **61**  
 Arithmétique **12**  
 Art divinatoire **22**  
 Asymétrie **99**  
 Autel (géométrie  
     de l') **69**  
 Aztèques **13**  
  
 Babbage, Charles **41**  
 Babyloniens **1**  
 Bases **9–12, 16, 17, 37, 100**  
 Battani, al- **83**  
 Berkeley,  
     George **111–113**  
 Bhaskara, II- **73**  
 Bolyai, Janos **119**  
 Brahmagupta **71**  
  
 Calcul **39–41**  
 Calcul de nombres  
     entiers **70**  
 Calcul différentiel  
     **70, 73, 101–110**  
 Calendrier **25**  
 Cantor, George **154**  
 Carré (cf. puissance)  
 Carrés magiques **63**  
 Certitude **154**  
 Chaos (théorie du) **145**  
 Chia Hwien **67**  
*Chin Chiu Shao* **65**  
 Chinois (anciens) **17–18**  
 Chiu Chang **64**  
*Chu Shih Chieh* **66**  
 Codage,  
     (cf. cryptographie)  
 Comptage **7**  
 Cônes (sections) **95**  
 Confiance (limites),  
     (cf. valeurs-p)  
 Constantes **42, 94, 96, 99**  
 Coordonnées  
     (géométrie des) **93**  
 Copernic, Nicolas **86**  
 Cosinus **82, 99, 117**  
 Cotangentes **83**  
 Coudée (royale) **48**  
 Courbes (propriétés),  
     **94, 95, 105**  
 Cryptographie **151**  
 Cubes (nombres),  
     (cf. puissances)  
  
 Dakota (langage) **8**  
 Davis, Philip **170**  
  
 'Dazzling', The **36**  
 Defence of  
     Freethinking... **112**  
 Dénominations (grands  
     nombres) **8**  
 Dérivées **101**  
 Descartes, René **91**  
 Diderot, Denis **114**  
 Différentiation  
     **101, 102–104**  
 Dimensions **120, 121**  
 Diophante **87**  
 Distance (fonction) **105**  
  
 Égyptiens (Anciens) **15**  
 Équations **42–47, 62, 69, 78**  
 Équations cubiques **45**  
 Équations linéaires  
     **44, 45**  
 Elements, The **59**  
 Ellipse **94**  
 Entiers **28, 87, 150**  
 Erreurs (barres) **51**  
 Ethno-mathématiques  
     **166–167**  
 Euclide **59–61**  
 Euler (formule) **115–117**  
 Euler, Leonhard **114**  
 Exponentielle (fonction)  
     **37, 99, 100**  
  
 Fermat, Pierre de **150**  
*Flatland* **121**  
 Fonctions **117**  
 Fonctions  
     antisymétriques **99**



- Fonctions  
constantes **99**
- Formalisme **122**
- Fractales (géométrie des) **143, 144**
- Fractions **28, 129–130**
- Galois,  
Évariste **122–125**
- Geématriea **22**
- Genre **168**
- Géométrie **59, 118**
- Géométrie analytique  
**93, 96, 102**
- Géométrie de l'autel **69**
- Géométrie des  
coordonnées **93**
- Géométrie non  
euclidienne **118**
- Germain, Sophie **168**
- Gödel, Kurt **138–140**
- Goldbach  
(conjecture) **149**
- Grand nombres  
**31–36, 69, 72**
- Graphes **94**
- Graphiques **106, 143**
- Graphiques **143**
- Grecs de l'Antiquité **20**
- Groupes (théorie des) **123–125**
- Hardy, G.H. **76**
- Hersh, Reuben **170**
- Hiéroglyphes **15**
- Hindous **69, 70**
- Hindous brahmiques **19**
- Hindous Gwalior **19**
- Hindous Kharosthi **19**
- Hyperbole **46, 95**
- Hypoténuse **29, 82**
- Identité **43**
- Indiens (Brahmis) **19**
- Indiens (invention du zéro) **24**
- Indiens (Yorubas) **11**
- Infini **129, 133, 134–137**
- Intégration **105**
- Intersection **125**
- Jain **72, 73**
- Joseph, George G. **165**
- Karaji, al- **80**
- Kashi, al- **81**
- Khayyam, Omar al- **81**
- Khuwarazmi,  
Muhammad al- **78**
- Kuhn, T.S. **113**
- Leibniz, G.W., von  
**40, 101, 108**
- Lemme Théorème  
des **4** quatre  
couleurs **147, 148**
- Liu Hui **63**
- Lobachevski,  
Nikolai **119**
- Logarithmes  
(fonction) **100**
- Machine à  
additionner **40**
- Machine à  
différences **41**
- Mahaviracharya **72**
- Mandelbrot, Benoît **144**
- Mathématiques  
(avenir des) **169, 170**
- Mathématiques  
(conception des) **53**
- Mathématiques  
(conception) **53**
- Mathématiques  
(craintes) **6**
- Mathématiques  
(crise) **135**
- Mathématiques  
(effets de) **169, 70**
- Mathématiques (euro-  
centrisme) **164, 165**
- Mathématiques  
(genre) **168**
- Mathématiques  
(grecques) **54–61**
- Mathématiques  
(pourquoi ce  
besoin ?) **4, 5**
- Mathématiques  
chinoises **62–67**
- Mathématiques  
indiennes **68–76**
- Mesures **48–53**
- Mesures impériales  
(unités) **50**
- Milliard **31–33**
- Monuments et  
mesures **52**
- Moteur de  
recherche **41**

- Mouvement  
 (paradoxe) **57–58**  
 Moyennes **152, 153**  
 Musique **55**
- Napier, John **38**  
 Navigation **89**  
 Newton, Isaac **101, 108**  
 Nombre (théorie du)  
**85, 149–151**  
 Nombre parfait **27**  
 Nombres (en  
 politique) **161–163**  
 Nombres (grands)  
**31–36, 69, 72**  
 Nombres  
 (pictogrammes) **8, 13**  
 Nombres (théorie des)  
**85, 149–151**  
 Nombres complexes **30**  
 Nombres écrits **13–23**  
 Nombres imaginaires  
**30, 92**  
 Nombres irrationnels  
**29, 62, 90**  
 Nombres négatifs  
**28, 62, 79, 90**  
 Nombres premiers **27**  
 Nombres  
 transcendants **29**  
 Notions courantes **60**  
 Numération arabe **23**  
 Numération Mmaya **14**  
 Numérologie **22**
- Ordinateurs **41,**  
**141–148, 169**
- Parabole **94, 96**  
 Paradoxes  
**57–58, 135–137**  
 Paramètres **42**  
 Pascal (triangle  
 de) **66–67**  
 Pascal, Blaise **40**  
 Périodique **99, 107**  
 Peuple aborigène **9–13**  
 Philosophie **58**  
 Pi ( $\pi$ ) **29, 61, 63**  
 Pictogrammes **8, 13, 15**  
 Plane (géométrie) **93**  
 Polynômes **08**  
 Postulat des droites  
 parallèles **60, 118, 119**  
 Postulats **60**  
 Puissances **33–36, 99**
- Racines **98**
- Sphérique (géométrie) **84**  
 Symétrie **99**  
 Système métrique (SI) **50**
- Table d'addition **125**  
 Table de  
 multiplication **125**  
 Théorème binomial **66**  
 Trigonométrie **99**
- Valeur **154, 155, 158**  
 Védique ((géométrie)  
**69, 70, 73**  
 Vitesse instantanée **103**
- Zéro **24**



## Que sont les mathématiques ? Pourquoi semblent-elles si mystérieuses ?

Les mathématiques sont la plus grande création intellectuelle de l'Homme et ce dès les premières civilisations avec des disciplines comme la géométrie, l'algèbre ou la trigonométrie. Aujourd'hui, elles sont partout dans notre vie quotidienne.

Cet ouvrage retrace l'Histoire des mathématiques, de ses premiers concepts jusqu'à nos jours, à travers des sujets comme les nombres, le calcul, la théorie de l'infini, le chaos, les statistiques...

*Ziauddin Sardar est un intellectuel britannique et écrivain.  
Jerry Ravetz est, quant à lui, philosophe et mathématicien à l'Université de Leeds.*

*Originale et très illustrée, la collection **Apêçu** est une introduction aux grands concepts ou théories scientifiques. Grâce à son style décalé et ludique, elle permettra à tout lecteur d'enrichir sa culture générale.*

Prix : 9,90 €

Couverture et illustration  
par [edwardbettison.com](http://edwardbettison.com)

ISBN 978-2-7598-1737-5

